الشامل في مادة الرياضيات
للصف الثالث الإعدادي
المدرس محمد خوجة


الشامل في مادة الرياضيات
للصف الثالث الإعدادي
للمدرس: محمد خوجه
اعداد المدرس : محمد خوجه
0949946383
شرح مبسط
وبعض الملاحظات
لكل فقرة

بدايةً:

لايوجد عمل كامل أو خالٍ من الأخطاء فإن صادفتم إحداها أتمنى أن تعلموا أنها بلا قصد.

لتقديم إقتراحاتكم أو أية ملاحظة:

0949946383

أو عبر بريد صفحة الرياضيات مع الأستاذ محمد خوجه.

الأستاذ محمد خوجه

محافظة حلب

دورات تقوية لكافة المراحل التعليمية ولطلاب الشهادتين.

نسأل الله أن يكون هذا العمل خالصاً لوجهه الكريم.

الجبر

الوحدة الأولى

مجموعات الأعداد

1- مجموعة الأعداد الطبيعية N:

وهي أصغر المجموعات العددية :

N = {0 , 1, 2 , 3 , ...}

2 - مجموعة الأعداد الصحيحة Z:

Z ={...... -2 , -1 ,0 , 1, 2 , 3.......}

3 - مجموعة الأعداد العشرية D:

$D = \{ a \times 10^n ;\ a \in Z ,\quad n \in N\}$

4 - مجموعة الأعداد العادية Q:

$Q = \{\frac{a}{b} ; b \neq 0 ,\quad a , b \in Z \}$

سنورد تمارين عن طبيعة الأعداد بعد أن نتعرف على تصنيفها وبشكل خاص يكون:

العدد العشري: هو كل عدد يكتب بالشكل $a \times 10^n$

طبيعة الأعداد:

أي عدد:

عادي

صحيح: 6 ، -8 ، 3

غير صحيح: $\frac{3}{4}$ ، $-\frac{3}{4}$ ، 4^3 ، $(-3)^{-2}$

أعداد غير عشرية (غير صحيحة) (أعداد دورية): $0.\overline{6}$ ، 2.454545...... ، 0.333333......

غير عادي

1- جذر عدد أولي (أو ما يؤول إليه):

$\sqrt{2} , \sqrt{3} , \sqrt{5} , \sqrt{24}$

2- عدد غير منتهٍ:

2.457922......

3- العدد π:

$\frac{\pi}{4} , \frac{5}{\pi} , 2\pi$

ملاحظة:

تحديد طبيعة عدد يرد كسؤال غختيار من متعدد لذلك أو يرد كسؤال كتابي (تحديد طبيعة ناتج كسر يحوي قوى أعداد عادية.

عزيزي الطالب: يأتي سؤال تحديد طبيعة عدد ضمن أسئلة الإختيار من متعدد ويحدد طبيعة عدد بطريقتين:

1) إيجاد ناتج قسمة البسط على المقام:

تستخدم عندما يعطى العدد على شكل كسر

مثال: حدد طبيعة الأعداد الآتية:

1) $\frac{3}{4} = 0.75$

عدد عادي (عادي عشري أو عادي غير صحيح) حيث:

$$\begin{array}{r|l} & 0.75 \\ \hline 4 & 30 \\ & -28 \\ \hline & 20 \\ & -20 \\ \hline & 00 \end{array}$$

2) $\frac{15}{3} = 5$

عدد عادي (عادي غير عشري أو عادي صحيح)

3) $\frac{634}{100} = \frac{634}{10^2} = 634 \times 10^{-2}$

عدد عادي (عادي عشري أو عادي غير صحيح)

لأنه يكتب بالشكل: $a \times 10^n$

4) $\frac{4}{3} = 1.\bar{3}$

عدد عادي (دوري أو عادي صحيح) حيث أن:

$$\begin{array}{r|l} & 1.33\ldots \\ \hline 3 & 4 \\ & -3 \\ \hline & 10 \\ & -9 \\ \hline & 10 \\ & -9 \\ \hline & 1 \end{array}$$

6) $\cancel{\pi} \times \frac{20}{4\cancel{\pi}} = \frac{20}{4} = 5$ عدد عادي

(عادي غير عشري أو عادي صحيح)

7) $\pi + \frac{20}{4\pi} = \underset{(4\pi)}{\frac{\pi}{1}} + \underset{(1)}{\frac{20}{4\pi}} = \frac{4\pi^2}{4\pi} + \frac{20}{4\pi}$

$= \frac{4\pi^2+20}{4\pi}$ عدد غير عادي

2) تحليل العدد لعوامله الأولية:

تستخدم عندما يعطى العدد على شكل جذر تربيعي

مثال: حدد طبيعة الأعداد الآتية:

1) $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ عدد غير عادي (لأنه يحوي $\sqrt{2}$)

بالإضافة للحالة التي تكون فيها عملية القسمة غير منتهية والعدد غير دوري فيكون العدد غير عادي

القاسم المشترك لعددين صحيحين:

القاسم المشترك الأكبر:

يوجد ثلاثة طرق لإيجاد القاسم المشترك الأكبر:

1 الطريقة العادية

2 خوارزمية الطرح المتتالي

3 خوارزمية القسمة المتتالية (الخوارزمية الإقليدية)

1) الطريقة العادية:

القاسم المشترك الأكبر:

1 2 3

لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين نتبع ما يلي:

1 نوجد قواسم كلاً من العددين.

2 نوجد مجموعة القواسم المشتركة بين العددين.

3 يكون القاسم المشترك الأكبر هو أكبر عدد موجود في مجموعة القواسم المشتركة.

مثال:

أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 16 و 24.

الحل:

1 نوجد قواسم كلاً من العددين.

قواسم العدد 16 هي :{1,2,4,8,16}

قواسم العدد 24هي :{1,2,3,4,6,8,12,24}

2 نوجد مجموعة القواسم المشتركة بين العددين.

القواسم المشتركة بين العددين هي: {1,2,4,8}

3 يكون القاسم المشترك الأكبر هو أكبر عدد موجود في مجموعة القواسم المشتركة.

GCD(24,16) = 8

خواص:

1) $GCD(a,a) = a$

GCD(8, 8) = 8

2) إذا كان b قاسماً للعدد a كان:

$GCD(a,b) = b$

GCD(16, 8) = 8

3) القول إن « العددان a و b أوليّان فيما بينهما »يعني القول: $GCD(a,b) = 1$

GCD (20,6) =1

2) خوارزمية الطرح المتتالي:

لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين باعتماد خوارزمية الطرح المتتالي:

1) نطرح أصغر العددين وليكن b من أكبرهما وليكن a.

2)نستمر بالطرح معتمدين المبدأ:

$GCD(a,b) = GCD(a, a-b)$

3)القاسم المشترك الأكبر هو آخر ناتج طرح غير معدوم.

مثال:

جِد القاسم المشترك الأكبر للعددين 693 و154 باعتماد خوارزمية الطرح المتتالي.

a	b	a-b
693	154	539
539	154	385
385	154	231
231	154	77
154	77	77
77	**77**	0

GCD(693, 154)=77

حيث أن العدد 77 هو **القاسم المشترك الأكبر هو آخر ناتج طرح غير معدوم.**

تتلخص الطريقة كالآتي:

1) نفرض العدد الكبير a والعدد الصغير b ونوجد الفرق بينهما a-b

2) نقارن الأعداد الثلاثة a و b و a-b ونحذف العدد الأكبر

3) نقارن بين العددين الباقيين ونضع الأكبر في عمود a و الأصغر في عمود b

4) نكرر العملية حتى نصل لناتج طرح معدوم ونختار العدد الذي يسبقه

3) خوارزمية القسمة المتتالية(الخوارزمية الإقليدية):

لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين a و b وحيث أن ($a>b$) باعتماد خوارزمية إقليدس:

إعداد المدرس: محمد خوجة 0949946383

1) نقسم a على b إقليدياً (التقسيم مع الباقي) ليكن:
$a=k\times b+r$ $(r<b)$

2) نقسم b إقليدياً على باقي القسمة في الخطوة السابقة r.

3) نتابع عملية القسمة وفق هذا النمط حتى نصل إلى الخطوة التي يصبح فيها باقي القسمة صفراً.

4) القاسم المشترك الأكبر هو آخر باق غير معدوم.

مثال:

أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 10165 و 3745 باعتماد خوارزمية إقليدس.

العملية	الباقي	المقسوم عليه	المقسوم
$693= 4\times154+77$	77	154	693
$154= 2\times154+0$	0	77	154

GCD(693, 154)=77

حيث أن العدد 77 هو **القاسم المشترك الأكبر هو آخر باقي قسمة غير معدوم.**

نلاحظ مما سبق أن خوارزمية القسمة الإقليدية تُنجز بخطوات أقل وبالتالي فإن إيجاد القاسم المشترك الأكبر بواسطتها أسهل.

ملاحظة: القاسم المشترك الأكبر يرد إما كسؤال اختيار من متعدد أو كسؤال كتابي مثل إيجاد القاسم المشترك الأكبر لأطوال أضلاع مثلث بهدف إيجاد طول ضلع مجهول

كسور مختزلة:

اختزال كسر نستخدم طريقتان:

1 **طريقة قابلية القسمة**

تستخدم في حالة:

الأعداد الصغيرة

مثال:

$$\frac{27}{12}$$

2 **القاسم المشترك الأكبر**

تستخدم في حالة :

الأعداد الكبيرة

مثال:

$$\frac{910}{3105}$$

1 قابلية القسمة:

يقبل العدد القسمة على 2 إذا كان آحاده زوجياً أو صفراً.

أمثلة: 40 , 252 , 786

يقبل العدد القسمة على 3 إذا كان مجموع أرقامه من مضاعفات العدد ثلاثة.

أمثلة: 246 , 111 , 741

يقبل العدد القسمة على 4 إذا قبل العدد القسمة على اثنين مرتين متتاليتن.

أمثلة: 40 , 424 , 36

توضيح:

العدد 36 مثلاً يقبل القسمة على 4 لأن:

$\frac{36}{2}=18$ كما أن : $\frac{18}{2}=9$

أما العدد 26 مثلاً لا يقبل القسمة على 4 لأن:

$\frac{26}{2}=13$ كما أن : $\frac{13}{2}=6.5$

يقبل العدد القسمة على 5 إذا كان آحاده صفراً أو خمسة.

أمثلة: 40 , 250 , 785

يقبل العدد القسمة على 6 إذا قبل القسمة على العددين اثنان وثلاثة معاً.

أمثلة: 48 , 252 , 786

يقبل العدد القسمة على 10 إذا كان آحاده صفر.

أمثلة: 40 , 2330 , 780

مثال:

اشرح لماذا يقبل الكسر $\frac{60}{45}$ الاختصار ثم جد الكسر المختزل الذي يساويه.

الحل:

نلاحظ أنه يوجد قواسم مشتركة بين البسط والمقام أكبرها هو العدد 15 وبالتالي بتقسيم البسط والمقام على 15 نجد أنه يصبح بالشكل: $\frac{60\div10}{45\div10}=\frac{4}{3}$

وهو كسر مختزل لأن العددين 3 و 4 أوليان فيما بينهما.

مثال/1/:

جد الكسر المختزل للكسر $\frac{693}{154}$:

الحل:

وجدنا سابقاً أنَّ GCD(693,154)=77 وبالتالي:

$$\frac{693}{154}=\frac{77\times 9}{77\times 2}=\frac{9}{2}$$

الجذر التربيعي لعدد موجب:

خواص:

$1)\ (\sqrt{a})^2=a$

مثال:

$(\sqrt{9})^2=9$, $(\sqrt{5})^2=5$

$2)\ \sqrt{a^2}=a$

مثال:

$\sqrt{(16)^2}=16$, $\sqrt{7^2}=7$

$3)\ \sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$

مثال:

$$\sqrt{3}\times\sqrt{4}=\sqrt{3\times 4}=\sqrt{12}$$

$4)\ \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

مثال:

$$\sqrt{\frac{36}{16}}=\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{16}}=\frac{6}{4}$$

كيف نكتب العدد $a\sqrt{b}$ بصيغة $\sqrt{c}$؟

اكتب العدد $2\sqrt{3}$ بصيغة $\sqrt{c}$ حيث c عدد طبيعي.

لدينا: $a=2\ ,\ b=3$.

الحل:

1) نستعمل الخاصة $a=\sqrt{a^2}$ فنكتب:

$$2\sqrt{3}=\sqrt{2^2}\times\sqrt{3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}$$

2) نستعمل الخاصة $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$ فنكتب:

$$\sqrt{4}\times\sqrt{3}=\sqrt{4\times 3}=\sqrt{12}$$

كيف نكتب العدد $\sqrt{c}$ بصيغة $a\sqrt{b}$؟

اكتب العدد $\sqrt{72}$ بصيغة $a\sqrt{b}$ حيث b و a عددان طبيعيان.

الحل:

لحل هذا التمرين لدينا طريقتان:

الطريقة الأولى:

نقوم بتحليل العدد 72 لعوامله الأولية.

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$2\times\sqrt{2}\times 3$

$$\sqrt{72}=6\sqrt{2}$$

الطريقة الثانية:

نكتب العدد 72 على شكل جداء عددين أحدهما يوجد له جذر والثاني ليس له جذر

$$\sqrt{72}=\sqrt{36\times 2}=\sqrt{36}\sqrt{2}=6\sqrt{2}$$

كيف نزيل الجذر من مقام كسر؟

لتحويل الكسر $\frac{a}{\sqrt{b}}$ إلى كسر مقامه عدد صحيح نضرب كلاً من بسطه ومقامه بالعدد $\sqrt{b}$:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

مثال:

اكتب العدد $\frac{2}{\sqrt{3}}$ بصيغة كسر مقامه عدد صحيح.

الحل:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

ملاحظة:

قد يرد سؤال يحوي جذور لأعداد مختلفة كسؤال اختيار من متعدد ونميز حالتان:

1) الإشارة بين الجذور هي جمع أو طرح مثال:

ناتج $A = 2\sqrt{2} + \sqrt{72} + \sqrt{18}$ بأبسط صورة هو:

$1)\ 11\sqrt{2} \qquad 2)\ 7\sqrt{2} \qquad 3) -2\sqrt{2}$

لإيجاد ناتج المقدار السابق نتبع مايلي:

1) نوجد جذر كل عدد موجود عن طريق تحليله لعوامله الأولية.

2) نجمع **فقط** أمثال الجذور المتشابهة **فقط**.

مثال:

$$\begin{aligned} A &= 2\sqrt{2} + \sqrt{72} + \sqrt{18} \\ &= 2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \\ &= (2 + 6 + 3)\sqrt{2} = 11\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 2\sqrt{2} + \sqrt{48} + \sqrt{108} \\ &= 2\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 6\sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{2} + (4 + 6)\sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{2} + +10\sqrt{3} \end{aligned}$$

1) الإشارة بين الجذور هي إشارة ضرب مثال:

ناتج $A = 2\sqrt{2} \times \sqrt{72} \times \sqrt{18}$ بأبسط صورة هو:

$1)\ 11\sqrt{2} \qquad 2)\ 7\sqrt{2} \qquad 3) -2\sqrt{2}$

لإيجاد ناتج المقدار السابق نتبع مايلي:

1) نوجد الجذر التربيعي كل عدد موجود عن طريق تحليله لعوامله الأولية.

2) نوجد ناتج **جداء** أمثال جميع جذور المتشابهة **وغير المتشابهة**.

3) نوجد ناتج **جداء** الأعداد التي تقع داخل جميع جذور المتشابهة **وغير المتشابهة** مع التركيز على الخاصة:

$$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$$

مثال:

$$\begin{aligned} A &= 2\sqrt{2} \times \sqrt{72} \times \sqrt{18} \\ &= 2\sqrt{2} \times 6\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \\ &= (2 \times 6 \times 3) \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \\ &= (36) \times 2 \times \sqrt{2} = 72\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 2\sqrt{5} \times \sqrt{18} \times \sqrt{108} \\ &= 2\sqrt{5} \times 3\sqrt{2} \times 6\sqrt{3} \\ & (2 \times 3 \times 6) \times \sqrt{5} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \\ &= 36 \times \sqrt{5 \times 2 \times 3} = 36 \times \sqrt{30} = 36\sqrt{30} \end{aligned}$$

إعداد المدرس: محمد خوجه 0949946383

الوحدة الثانية

قوة عدد عادي

خواص:

في حالة $a \neq 0$ لدينا:

$1)\ a^0 = 1$

مثال:

$5^0 = 1 \quad , \quad (108)^0 = 1$

$2)\ a^1 = a$

مثال:

$5^1 = 5 \quad , \quad (108)^1 = 108$

$3)\ a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \dots \dots . . a}_{\text{n مرة}}$

مثال:

$5^4 = \underbrace{5 \times 5 \times 5}_{\text{4 مرات}}$

$4)\ \frac{1}{a^{-n}} = a^n \quad , \quad 4)\ \frac{1}{a^n} = a^{-n}$

مثال:

$\frac{1}{3^{-4}} = 3^{+4} \quad ,4)\ \frac{1}{7^8} = 7^{-8}$

$5)\ (a \times b)^n = a^n \times b^n$

مثال:

$(-4 \times 6)^n = (-4)^n \times 6^n$

$6)\ (\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

مثال:

$(\frac{8}{3})^7 = \frac{8^7}{3^7}$

$7)\ \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

مثال:

$\frac{4^9}{4^3} = 4^{9-3}$

$8)\ a^n \times a^m = a^{n+m}$

تقرأ هذه الخاصة كالتالي: ضرب القوى جمع الأسس

مثال:

$8^5 \times 8^3 = 8^{5+3}$

$9)\ (a^m)^n = a^{m \times n}$

تقرأ هذه الخاصة كالتالي: قوة القوة

مثال:

$(4^3)^2 = 4^{3\times2}$

$(2^{-6})^{-1} = 2^{-6\times-1}$

ملاحظة:

قد يرد سؤال اختيار من متعدد من الخواص السابقة

إعداد المدرس: محمد خوجه 0949946383

كيف نستعمل العمليات على قوى الأعدادالعادية ؟

تستخدم لإيجاد ناتج كسور تحوي قوى لأعداد مختلفة وتقسم لثلاثة حالات:

1 الأساسات الموجودة في البسط هي ذاتها الموجودة في المقام:

$$A = \frac{3^5 \times 4^2 \times 5^6}{5^7 \times 3^4 \times 4^2}$$

1) في هذه الحالة نستخدم الخاصة رقم *4* ونقوم برفع القوى الموجودة في المقام للبسط مع تغيير إشارة الأس

2) نستخدم الخاصة رقم *8* ونقوم بضرب كل قوتين تملكان نفس الأس

3) نوجد ناتج كل قوة على حِدى باستخدام الخاصة رقم *3*.

2 الأساسات الموجودة في البسط و الأساسات في الموجودة المقام تربط بينهم علاقة تربيع أو تكعيب:

$$B = \frac{3^9 \times 4^2 \times 5^6}{5^6 \times 9^4 \times 2^8}$$

1) في هذه الحالة نستخدم الخاصة رقم *9* ونقوم بتحويل كل الأسس وفق المفهوم الآتي:

نحول الأس الكبير لقوى للأس الصغير الموافق له.

ففي الكسر الموجود أعلاه نحول العدد 4 لقوى للعدد 2 ونحول العدد 9 لقوى للعدد 3

2) في هذه الحالة نكون قد انتقلنا للحالة 1 نكمل بعدها كما ورد في تلك الحالة

3 بالإضافة إلى الأساسات الموجودة في البسط والمقام يوجد أعداد بدون أس:

$$C = \frac{3^4 \times 24 \times 5^6}{5^6 \times 12 \times 3^4 \times 2}$$

1) في هذه الحالة نقوم أولاً بإختصار الأعداد الموجودة في البسط مع الأعداد الموجودة في المقام والتي لا تحوي أسس.

2) نكون بذلك قد انتقلنا إما للحالة 1 أو للحالة 2 ونكمل كما ورد سابقاً.

1 الأساسات الموجودة في البسط هي ذاتها الموجودة في المقام:

مثال:

دون إستخدام آلة حاسبة أوجد ناتج:

$$A = \frac{3^5 \times 4^2 \times 5^6}{5^7 \times 3^4 \times 4^2}$$

الحل:

نستخدم الخاصة رقم *4:*

$$= 3^5 \times 4^2 \times 5^6 \times 5^{-7} \times 3^{-4} \times 4^{-2}$$

نقوم بالترتيب بحيث يكون كل أساس بجانب الأساس المشابه له:

$$= 3^5 \times 3^{-4} \times 4^2 \times 4^{-2} \times 5^6 \times 5^{-7}$$

نستخدم الآن الخاصة رقم 8:

$$= 3^{5-4} \times 4^{2-2} \times 5^{6-7}$$

$$= 3^1 \times 4^0 \times 5^{-1} = 3 \times 1 \times \frac{1}{5^{+1}}$$

$$= \frac{3}{5} = 0.6$$

إعداد المدرس: محمد خوجه 0949946383

(2) الأساسات الموجودة في البسط و الأساسات في الموجودة المقام تربط بينهم علاقة تربيع أو تكعيب:

مثال:

دون إستخدام آلة حاسبة أوجد ناتج:

$$B = \frac{3^9 \times 4^2 \times 5^6}{5^6 \times 9^4 \times 2^8}$$

الحل:

نستخدم الخاصة 9 (قوة القوة) ونلاحظ هنا ان العدد3 ترتبط بالعدد 9 بعلاقة التربيع أي مربع العدد 3 هو العدد 9 وأن العدد 2 ترتبط بالعدد 4 بعلاقة التربيع أي مربع العدد 2 هو العدد 4.

لذلك نقوم بتحويل العدد 9 لقوى للعدد 3 وتحويل العدد 4 لقوى للعدد 2.

$$2^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad (4)^2 = (2^2)^2 = 2^4$$

$$3^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad (9)^4 = (3^2)^4 = 3^8$$

نعوض في B فنجد أن:

$$B = \frac{3^9 \times 4^2 \times 5^6}{5^6 \times 9^4 \times 2^8} = \frac{3^9 \times 2^4 \times 5^6}{5^6 \times 3^8 \times 2^8}$$

$$= 3^9 \times 2^4 \times 5^6 \times 5^{-6} \times 3^{-8} \times 2^{-8}$$

$$= 3^9 \times 3^{-8} \times 2^4 \times 2^{-8} \times 5^6 \times 5^{-6}$$

$$= 3^{9-8} \times 2^{4-8} \times 5^{6-6}$$

$$= 3^1 \times 2^{-4} \times 5^0 = 3 \times \frac{1}{2^{+4}} \times 1$$

$$= \frac{3}{2^{+4}} = \frac{3}{2 \times 2 \times 2 \times 2}$$

$$= \frac{3}{16} = 0.1875$$

(3) بالإضافة إلى الأساسات الموجودة في البسط والمقام يوجد أعداد بدون أس:

مثال:

دون إستخدام آلة حاسبة أوجد ناتج:

$$C = \frac{3^4 \times 24 \times 5^6}{5^6 \times 12 \times 3^4 \times 2}$$

الحل:

$$C = \frac{3^4 \times 24 \times 5^6}{5^6 \times 12 \times 3^4 \times 2} =$$

$$= \frac{\cancel{3^4} \times 24 \times \cancel{5^6}}{\cancel{5^6} \times 12 \times \cancel{3^4} \times 2} = \frac{3^4 \times 5^6}{5^6 \times 3^4}$$

$$= 3^4 \times 5^6 \times 5^{-6} \times 3^{-4} = 3^{4-4} \times 5^{6-6}$$

$$= 3^0 \times 5^0 = 1$$

قد نصادف حالة رابعة:

$$C = \frac{3^7 \times 2^8 \times 5^6}{2^6 \times (15)^5}$$

نلاحظ هنا أن العدد 2 موجود في البسط والمقام أما العددين 3 و 5 موجودين في البسط فقط عندئذ نقوم بتحويل العدد 15 إلى جداء العددين 3 و 5 فنحصل على كسر من الحالة الأولى نكمل كالمعتاد.

$$C = \frac{3^7 \times 2^8 \times 5^6}{2^6 \times (15)^5} = \frac{3^7 \times 2^8 \times 5^6}{2^6 \times (3 \times 5)^5}$$

$$= \frac{3^7 \times 2^8 \times 5^6}{2^6 \times 3^5 \times 5^5}$$

قوى العدد عشرة

تستخدم هنا القوانين ذاتها التي مرت معنا في درس قوة عدد عادي

خواص:

$$1)\ (10)^0 = 1$$

$$2)\ (10)^1 = 10$$

$$3)\ (10)^n = 10 \times \underbrace{0 \times \dots\dots\dots 0}_{n\ \text{صفر}}$$

مثال:

$$(10)^4 = 1\underbrace{0000}_{4\ \text{أصفار}}$$

$$4)\ \frac{1}{(10)^{-n}} = (10)^n\ ,$$

$$4)\ \frac{1}{(10)^n} = (10)^{-n}$$

مثال:

$$\frac{1}{(10)^{-6}} = (10)^{+6}$$

$$5)\ \frac{(10)^n}{(10)^m} = (10)^{n-m}$$

مثال:

$$\frac{(10)^8}{(10)^6} = (10)^{8-6} = (10)^2$$

$$6)\ (10)^n \times (10)^m = (10)^{n+m}$$

مثال:

$$(10)^5 \times (10)^4 = (10)^{4+5} = (10)^9$$

تمرين:

دون إستخدام آلة حاسبة أوجد ناتج:

$$C = \frac{3^4 \times (10)^{-4} \times 5^5}{5^6 \times (-0.1) \times 3^4 \times (10)^{-4}}$$

الحل:

$$C = \frac{3^4 \times (10)^{-4} \times 5^5}{5^6 \times (-0.1) \times 3^4 \times (10)^{-4}}$$

$$= \frac{3^4 \times (10)^{-4} \times 5^5}{5^6 \times (-(10)^{-1}) \times 3^4 \times (10)^{-4}}$$

$$= -\frac{3^4 \times (10)^{-4} \times 5^5}{5^6 \times (10)^{-1} \times 3^4 \times (10)^{-4}}$$

$$= -\frac{3^4 \times (10)^{-4} \times 5^5}{5^6 \times 3^4 \times (10)^{-5}}$$

$$= -3^{4-4} \times (10)^{-4+5} \times 5^{5-6}$$

$$= -3^0 \times (10)^{+1} \times 5^{-1} = -1 \times 10 \times \frac{1}{5}$$

$$= -10 \times \frac{1}{5} = -\frac{10}{5} = -2$$

ملاحظة/1/:

قوى عدد عادي ترد كسؤال اختيار من متعدد في أغلب الأوقات لذلك يجب التركيز أثناء الحل لأن خطأ صغير يؤدي إلى إجابة خاطئة.

إعداد المدرس: محمد خوجه 0949946383

النشر:

تعريف: يعرف النشر على أنه كتابة المقدار بدون أقواس.

ونميز ثلاث حالات:

1) جداء حد بقوس:

a.(b+c) = a.c + b.c

$$x\,(3+x) = 3x + x^2$$

2) جداء بقوس بقوس:

(a+b).(c+d) = a.c + a.d+ b.c + b.d

$$(x-2)(3+x) = 3x + x^2 - 6 - 2x$$
$$x^2 + x + 6$$

3) المطابقات التربيعية الشهيرة:

$$1)\ (\mathrm{a}+\mathrm{b})^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(4+\mathrm{x})^2 = (4)^2 + 2(4)(x) + (x)^2$$
$$= 16 + 8x + x^2$$

$$2)\ (\mathrm{a}-\mathrm{b})^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(4-\mathrm{x})^2 = (4)^2 - 2(4)(x) + (x)^2$$
$$= 16 - 8x + x^2$$

$$3)\ a^2 - b^2 = (\mathrm{a}-\mathrm{b})(\mathrm{a}+\mathrm{b})$$

$$3)\ x^2 - 36 = (\mathrm{x}-6)(\mathrm{x}+6)$$

حالات مركبة (تحوي أكثر من حالة):

انشر ثم اختزل كلاً من:

$$1)\left(\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{1}{2}x+1\right)+(x-1)(x-3)$$
$$= \frac{1}{4}x^2 - 1 + x^2 - 3x - x + 3$$
$$= \frac{1}{4}x^2 + x^2 - 3x - x - 1 + 3$$
$$= \frac{5}{4}x^2 - 4x + 2$$

$$2)\left(\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{1}{2}x+1\right)-(x-1)(x-3)$$
$$= \frac{1}{4}x^2 - 1 - (x^2 - 3x - x + 3)$$
$$= \frac{1}{4}x^2 - 1 - x^2 + 3x + x - 3$$
$$= \frac{3}{4}x^2 + 4x - 4$$

$$3)\ (2x-1)(4+x) - (x-6)(2x-3)$$
$$= 8x + 2x^2 - 4 - x$$
$$-(2x^2 - 3x - 12x + 18)$$
$$= 7x + 2x^2 - 4 - (2x^2 - 15x + 18)$$
$$= 7x + 2x^2 - 4 - 2x^2 + 15x - 18$$
$$= 22x - 22$$

التحليل:

تعريف: يعرف التحليل على أنه كتابة المقدار على شكل جداء أقواس.

يتم تحليل مقدار ما بإحدى الطريقتين:

1 مطابقة

1 وجود حد ثابت (عدد)

$C = x^2 - 2x + 1$

2 فرق مربعي حدين

$B = x^2 - 36$

2 عنصر مشترك

عدم وجود حد ثابت (عدد)

$A = x^2 - 2x$

1 حالة مطابقة:

1 وجود حد ثابت:

لتحليل مقدار في هذه الحالة نستخدم العلاقة:

$($ جذر الأول , إشارة الثاني , جذر الثالث $)^2$

مثال:

$C = x^2 - 2x + 1$

$($ جذر الأول , إشارة الثاني , جذر الثالث $)^2$

$C = (x - 1)^2$

$F = x^2 + 14x + 49$

$F = (x + 7)^2$

$D = (x - 5)^2 - 18(x - 5) + 81$

$($ جذر الأول , إشارة الثاني , جذر الثالث $)^2$

$D = [(x - 1) - 9]$

$D = [x - 1 - 9]$

$D = [x - 10\,]$

2 فرق مربعي حدين:

لتحليل مقدار في هذه الحالة نستخدم الماطبقة التربيعية الثالثة:

$$3)\ a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

حلل ما يلي:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$B = x^2 - 36 = (x - 6)(x + 6)$$

$$a^2 - b^2$$

$$C = (4x + 3)^2 - 64$$
$$= (4x + 3 - 8)(4x + 3 + 8)$$
$$= (4x - 5)(4x + 11)$$

$$a^2 - b^2$$

$$C = (4x + 8)^2 - (2x - 1)^2$$
$$= (4x + 8 + 2x - 1)\big(4x + 8 - (2x - 1)\big)$$
$$= (4x + 8 + 2x - 1)(4x + 8 - 2x + 1)$$
$$= (6x + 7)(2x + 9)$$

2 حالة عنصر مشترك:

حل ما يلي:

$$A = x^2 - 2x = x.\left[\frac{x^2}{x} - \frac{2x}{x}\right]$$
$$= x.(x-2)$$

ملاااااااااااااحظة هامة:

عندما يكون أمثال أحد الحدين هو العدد 1 وأمثال الحد الثاني عدد مختلف عن العدد 1 عندئذ يكون العنصر المشترك فقط x .

$$B = 4x - 2x^2 = 2x.\left[\frac{4x}{2x} - \frac{2x^2}{2x}\right]$$
$$= 2x.(2-x)$$

ملاااااااااااااحظة هامة:

عندما يكون أمثال كل من الحدين هو عدد عدد مختلف عندئذ نقوم بقسمة العدد الكبير على الصغير وإن كان ناتج القسمة عدد صحيح يكون العدد الصغير بالإضافة للمجهول x هو العنصر المشترك في المثال أعلاه لدينا:

$$\frac{4}{2} = 2$$

وبما أن ناتج القسمة هو عدد صحيح فإن العنصر المشترك للعددين هو العدد 2 (العدد الصغير وليس ناتج القسمة) والعنصر المشترك من المجاهيل هو x

$$C = 4x - 5x^2 = x.\left[\frac{4x}{x} - \frac{5x^2}{x}\right]$$
$$= x.(4-5x)$$

ملاااااااااااااحظة هامة:

نلاحظ هنا أن:

$$\frac{5}{4} = 1.25$$

وبما أن ناتج القسمة هو عدد غير صحيح فإنه لا يوجد عنصر المشترك للعددين والعنصر المشترك من المجاهيل فقط و هو x

$$D = (x-5)^2 - 2(x-5)$$
$$= (x-5).\left[\frac{(x-5)^2}{(x-5)} - \frac{2(x-5)}{(x-5)}\right]$$
$$= (x-5)\,[\,(x-5) - 2\,]$$
$$= (x-5)\,[\,x-7\,]$$

ملاااااااااااااحظة هامة:

عندما يحوي المقدار قوس فالعنصر المشترك حصراً قوس مثال:

$$D = (x-5)^2 - 3x + 15$$

نلاحظ أن المقدار يحوي ال قوس $(x-5)^2$ فالعنصر المشترك حصراً قوس وبالتالي نتبع مايلي:

نلاحظ أن أمثال المجهول $(x-5)^2$ هي العدد 1.

وبالتالي يجب أن نحول أمثال المجهول في المقدار $-3x+15$ للعدد 1

أي أننا بحاجة لإخراج عنصر مشترك من المقدار $-3x+15$

من الواضح أن أمثال المجهول هنا تُحول للعدد 1 بإخراج 3- عنصر مشترك من المقدار $-3x+15$

أي أن:

$$D = (x-5)^2 - 3x + 15$$
$$= (x-5)^2 - 3\left[\frac{-3x}{-3} + \frac{15}{-3}\right]$$
$$= (x-5)^2 - 3(x-5)$$
$$= (x-5)\left[\frac{(x-5)^2}{(x-5)} - \frac{3(x-5)}{(x-5)}\right]$$
$$= (x-5)[(x-5) - 3\,]$$
$$= (x-5)[x-5-3\,] = (x-5)[x-8\,]$$

الوحدة الثالثة

معادلات ومتراجحات

أولاً: معادلات الدرجة الأولى بمجهول واحد:

لحل المعادلة من الدرجة الأولى نتبع ما يلي:

1) نفك الأقواس إن وجدت.

2) ننقل المجاهيل لطرف والمعاليم لطرفٍ آخر مع تغيير إشارة الحد المنقول.

3) نجمع الحدود المتشابهة:

4) نقسم على أمثال المجهول.

مثال:

أوجد جذور المعادلة الآتية:

$$3(5x-4)=4(3x-6)$$

1) نفك الأقواس إن وجدت.

$$15x-12=12x-24$$

2) ننقل المجاهيل لطرف والمعاليم لطرفٍ آخر مع تغيير إشارة الحد المنقول.

$$15x-12x=+12-24$$

3) نجمع الحدود المتشابهة:

$$3x=-12$$

4) نقسم على أمثال المجهول.

$$\frac{3x}{3}=-\frac{12}{3}\ \Rightarrow\ x=-4$$

كيفية حل معادلة تحوي كسور:

نوحد المقامات ونحذفها و نكمل بالطريقة المعتادة:

مثال:

أوجد جذور المعادلة الآتية:

$$\frac{y}{2}+\frac{1}{3}=\frac{y}{3}+\frac{1}{2}$$

$$\frac{y}{2}-\frac{y}{3}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3y-2y}{6}=\frac{-2+3}{6}$$

$$3y-2y=-2+3\ \Rightarrow\ y=1$$

اصطناع معادلة:

في أحد المجالس عدد من الأشخاص، ربعهم تنحصر أعمارهم بين 20 سنة و 30سنة، وثُلثهم تنقص أعمارهم عن 20 سنة، ومنهم 20 شخصاً تزيد أعمارهم عن30 سنة ما عدد الأشخاص في هذا المجلس؟

الحل:

نفرض عدد الأشخاص x.

ربعهم تنحصر أعمارهم بين 20 سنة و 30 سنة: $\frac{x}{4}$

وثُلثهم تنقص سأعمارهم عن 20 سنة: $\frac{x}{3}$

ومنهم 20 شخصاً تزيد أعمارهم عن30 سنة

$$x=\frac{x}{4}+\frac{x}{3}+20\ \Rightarrow\ x-\frac{x}{4}-\frac{x}{3}=20$$

$$\frac{12x-3x-4x}{12}=20\Rightarrow\frac{5x}{12}=20$$

$$5x=12\times 20\ \Rightarrow\ x=\frac{12\times 20}{5}=\frac{240}{5}$$

$$\Rightarrow x=48$$

فعدد الأشخاص في المجلس يساوي 48.

ملاحظة:

دائما في حل مثل تلك مائل نرمز للشيء الذي يُسأل عنه مباشرة x

ثانياً: الجداء الصفري:

خواص:

يرمز a و b و c و d إلى أعداد حقيقية:

$$1)\ a \times b = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{إما } a = 0 \\ \text{أو } b = 0 \end{cases}$$

$$2)\ x \times y = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{إما } x = 0 \\ \text{أو } b = 0 \end{cases}$$

$$3)\ a \neq 0 \begin{cases} ax = 0 \Rightarrow x = 0 \\ ax^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

مثال:

$$\begin{cases} 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$$3)\ x^2 = a$$

لحل هذه المعادلة لدينا ثلاث حالات:

1) $a > 0$ للمعادلة جذران مختلفان:

$$+\sqrt{a}\ ,\ -\sqrt{a}$$

2) $a = 0$ للمعادلة جذر وحيد:

$$x = 0$$

3) $a < 0$ المعادلة مستحيلة الحل.

أمثلة:

حل كلاً من المعادلات الآتية:

$$a \times b = 0$$

$$1)\ (x-2)(x+3) = 0$$

$$\begin{cases} \text{إما } x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ \text{أو } x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

ملاحظة/1/ :

أثناء حل معادلة جداء صفري عندما يكون التربيع للقوس يهمل و يُؤخذ ما داخل القوس فقط أما عندما يكون التربيع للمجهول يأخذ المجهول مع التربيع

ملاحظة/1/ :

عندما يكون الناتج سالب والمجهول من الدرجة الأولى (بلا قوة 2) فإن الحل مقبول ويكون مرفوض أو مستحيل فقط عندما يكون الناتج سالباً والمجهول من الدرجة الثانية.

مثال: أوجد جذور المعادلة الآتية:

$$2)\ 2x(3x+9)(x+2)^2 = 0$$

$$\begin{cases} \text{إما } 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \text{أو } 3x + 9 = 0 \Rightarrow 3x = -9 \Rightarrow x = \frac{-9}{3} = -3 \\ \text{أو } x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

$$3)\ (x^2-16)(x^2+16)(x+16)^2 = 0$$

$$\begin{cases} \text{إما } x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} \text{إما } x = 4 \\ \text{أو } x = -4 \end{cases} \\ \text{أو } x^2 + 16 = 0 \Rightarrow x^2 = -16 \quad \text{مستحيلة} \\ \text{أو } x + 16 = 0 \Rightarrow x = 16 \end{cases}$$

ملاحظة/1/ :

عندما يرد السؤال في حالة المعادلة من الدرجة الأولى و معادلة الجداء الصفري فإن الطلب يكون أوجد جذور المعادلات لكن يجب أن نميز بين المعادلة من الدرجة الأولى و معادلة الجداء الصفري دوما المعادلة من الدرجة إما أن تحوي إشارة جمع أو طرح بين الحدود أو الأقواس أو أن تحوي إشارة يساوي بين الأقواس أما معادلة الجداء الصفري تحوي إشارة جداء بين الحدود أو الأقواس

مثال: المعادلة: $3(5x-4) = 4(3x-6)$ هي معادلة من الدرجة الأولى

وكذلك المعادلة $2x - (3x+9) + (x+2) = 0$

هي معادلة من الدرجة الأولى

أما المعادلة $2x(3x+9)(x+2)\ =0$ هي معادلة جداء صفري

وكذلك المعادلة $3(5x-4)(3x-6)=0$ هي معادلة جداء صفري.

مثال:

فيما يأتي، أوجد جميع القيم التي يمكن أن يأخذها المجهول في كل حالة:

$$1)\ \ x^2+5=54$$

$$x^2=54-5\Rightarrow x^2=49\ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{إما}\ \ x=7 \\ \text{أو}\ \ x=-7 \end{array}\right.$$

ملاحظة:

قد يُطلب منا تحليل الطرف الأيسرثم حل المعادلة وهنا يُقصد بتحويل المعادلة لمعادلة جداء صفري وحصراً تحل بالتحليل ثم كمعادلة جداء صفري أي لا يمكن حلها كمعادلة من الدرجة الأولى.

مثال:

حلل الطرف الأيسر، ثم حل المعادلة:

$$1)\ x(x-2)+3(x-2)=0$$

$$\Rightarrow (x-2)\left[\frac{x(x-2)}{(x-2)}+\frac{3(x-2)}{(x-2)}\right]=0$$

$$\Rightarrow (x-2)[\ x+3\ ]=0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{إما}\ \ x-2=0\ \Rightarrow\ \ x=2 \\ \text{أو}\ x+3=0\ \Rightarrow\ \ x=-3 \end{array}\right.$$

ثالثاً: متراجحات الدرجة الأولى بمجهول واحد

ملاحظات/1/:

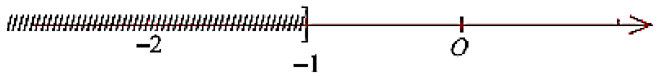
1) في حالة $>\ ,\ <$ يكون المجال مفتوح.

2) في حالة $\geq\ ,\leq$ يكون المجال مغلق.

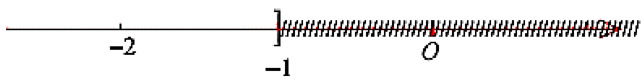
3) في حالة $-\infty\ ,+\infty$ يكون المجال مفتوح..

ملاحظات/2/:

المجال المفتوح تكون جهته عكس جهة الحل.



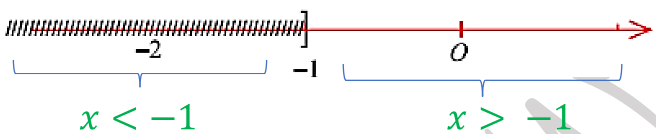
المجال المغلق تكون جهته بجهة الحل.



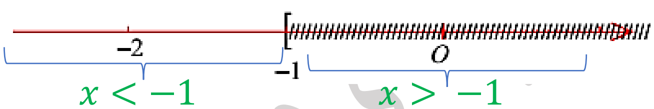
تدرب:

مثل المتراجحات الآتية على مستقيم الأعداد:

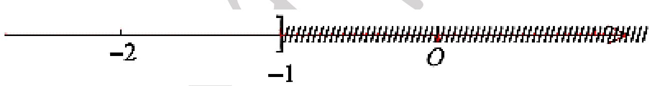
$$1)\ x>\ -1$$



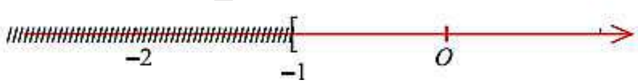
$$2)\ x<\ -1$$



$$3)\ x\leq\ -1$$



$$4)\ x\geq\ -1$$



خواص:

1) إذا جمعنا أو طرحنا أو قسمنا أو ضربنا طرفي متراجحة بنفس العدد (عدد موجب تماماً) نحصل على

متراجحة مكافئة للمتراجحة المعطاة. ولا تتغير جهة المتراجحة.

$$2x \geq -7 \Rightarrow 3 \times 2x \geq 3 \times -7$$
$$6x \geq -21$$

2) إذا ضربنا أو قسمنا طرفي متراجحة على عدد (عدد سالب تماماً) أو قسمنا طرفيها على عدد (عدد سالب تماماً)، تتغير جهة المتراجحة.

$$2x \geq -7 \Rightarrow -3 \times 2x \geq -3 \times -7$$
$$-6x \leq 21$$

لحل المتراجحة من الدرجة الأولى نتبع ما يلي:

1) نفك الأقواس إن وجدت.

2) ننقل المجاهيل لطرف والمعاليم لطرفٍ آخر مع تغيير إشارة الحد المنقول.

3) نجمع الحدود المتشابهة:

4) نقسم على أمثال المجهول.

5) نمثل المتراجحة على مستقيم الأعداد.

مثال:

حل كلاً من المتراجحات الآتية ومثل حلولها على مستقيم الأعداد.

$$1)\ 3(5+3x) > 3(x-3)$$

1) نفك الأقواس إن وجدت.

$$15 + 9x > 3x - 9$$

2) ننقل المجاهيل لطرف والمعاليم لطرفٍ آخر مع تغيير إشارة الحد المنقول.

$$9x - 3x > -15 - 9$$

3) نجمع الحدود المتشابهة:

$$6x > 24$$

4) نقسم على أمثال المجهول.

$$\frac{\cancel{6}x}{\cancel{6}} > \frac{24}{6} \quad \Rightarrow \quad x > 4$$

كيفية حل متراجحة كسرية:

نوحد المقامات ونحذفها و نكمل بالطريقة المعتادة:

مثال:

حل المتراجحة الآتية ومثل حلولها على مستقيم الأعداد.

$$\underset{(3)}{\frac{y}{2}} + \underset{(2)}{\frac{1}{3}} > \underset{(2)}{\frac{y}{3}} + \underset{(3)}{\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow \frac{3y}{6} + \frac{2}{6} > \frac{2y}{6} + \frac{3}{6}$$
$$\Rightarrow 3y + 2 > 2y + 3$$

ونكمل كالمعتاد.

اصطناع متراجحة:

1) شراء محابر من المكتبة يكلف 1790ليرة لكل محبرة. وشراؤها عن طريق موقع إنترنت يكلف 1650ليرة لكل محبرة، مع إضافة أجرة النقل وهي 490 ليرة أياً كان عدد المحابر المشتراة .بدءاً من أي عدد من المحابر يكون الشراء عن طريق موقع إنترنيت أوفر من الشراء من المكتبة؟

الحل:

نرمز إلى أقل عدد من المحابر ليكون الشراء عن طريق موقع إنترنيت أوفر بالرمز x فيكون:

ترميز المجهول:

شراء محابر من المكتبة يكلف 1790ليرة لكل محبرة.

كلفة المحابر من المكتبة $1790 \times x$

وشراؤها عن طريق موقع إنترنت يكلف 1650ليرة لكل محبرة، مع إضافة أجرة النقل وهي 490 ليرة

وكلفتها عن طريق موقع الإنترنيت $1650 \times x + 490$

تشكيل متراجحة:

نريد أن تكون كلفة الشراء من الإنترنت أقل من الكلفة في حالة المكتبة، أي:

$$1790 \times x > 1650 \times x + 490$$

$$1790x - 1650x > 490 \Rightarrow 140x > 490$$

$$\frac{140x}{140} > \frac{490}{140} \Rightarrow x > 3.5$$

وبالتالي فإن عدد من المحابر المشتراة يجعل الشراء عبر موقع أنترنت أوفر مما هو من المكتبة هو 4 محابر.

2) عمر سامر الآن 11سنة وعمر غيث 26سنة. بعد كم سنة يصبح عمر غيث مساوياً ضعفي عمر سامر؟

نفرض عدد السنين x.

بعد x يصبح عمر سامر $x+11$.

بعد x يصبح عمر غيث $x+26$.

بعد كم سنة يصبح عمر غيث مساوياً ضعفي عمر سامر؟

$$x + 26 = 2(x + 11)$$

$$x + 26 = 2x + 22 \Rightarrow x - 2x = 22 - 26$$

$$\Rightarrow -x = -4 \Rightarrow x = 4$$

بعد أربع سنوات يصبح عمر غيث $4 + 26 = 30$

بعد أربع سنوات يصبح سامر غيث $4 + 11 = 15$

3) ما العدد الذي إذا جمعنا ثلاثة أرباعه مع خمسيه حصلنا على 460؟

نفرض العدد x.

$$\frac{3x}{4} + \frac{2x}{5} = 460 \Rightarrow \frac{15x + 8x}{20} = 460$$

$$\frac{23x}{20} = 460 \Rightarrow 23x = 20 \times 460$$

$$x = \frac{20 \times 460}{23} = 20 \times 20 = 400$$

ملاحظة:

قد يكون السؤال عن عدد ما بصيغة (هل العدد حل للمتراجحة) في هذه الحالة لانحل المتراجحة بالخطوات السابقة وإنما نقوم بتعويض العدد المذكور مكان المجهول الموجود في المتراجحة فإن تحققت المتراجحة (نتج عددان يحققان جهة المتراجحة) قلنا أن العدد المذكور هو حل للمتراجحة وإن لم تتحقق قلنا أنه ليس حلاً للمتراجحة.

مثال

لدينا المتراجحة $2x - 5 \le 3$.

أي الأعداد $5,\ 4,\ \frac{1}{2}$ حل لهذه المتراجحة وأيها ليس حلاً لها؟

الحل:

$$x = 5 \Rightarrow 2(5) - 5 \le 3 \Rightarrow 10 - 5 \le 3 \Rightarrow 5 \le 3$$

غيرمحققة وبالتالي فإن العدد 5 ليس حلاً للمتراجحة.

غير محققة لأن العدد 3 أصغر من العدد 5 وهنا نتج لدينا $5 \le 3$ وهذا خطأ لذلك قلنا أن العدد 5 ليس حلاً للمتراجحة.

$$x = 4 \Rightarrow 2(4) - 5 \le 3 \Rightarrow 8 - 5 \le 3 \Rightarrow 3 \le 3$$

محققة وبالتالي فإن العدد 5 هو حل للمتراجحة.

محققة لأنه بشكل عام المتراجحة تحوي حالتان أصغر أو يساوي وهنا الطرفان متساويان أي المتراجحة صحيحة ومحققة لذلك قلنا أن العدد 4 هو حل للمتراجحة.

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right) - 5 \le 3 \Rightarrow 1 - 5 \le 3 \Rightarrow -4 \le 3$$

محققة وبالتالي فإن العدد $\frac{1}{2}$ هو حل للمتراجحة.

محققة لأن في الحالة العامة العدد -4 أصغر من العدد 3 وهنا نتج لدينا $-4 \le 3$ وهذا صحيح لذلك قلنا أن العدد $\frac{1}{2}$ هو حل للمتراجحة.

إعداد المدرس: محمد خوجه 0949946383

الوحدة الرابعة

جمل المعادلات

جملة معادلتين خطيتين بمجهولين:

لحل جملة معادلتين خطيتين بمجهولين لدينا طريقتان:

1 جبرياً

2 بيانياً

جبرياً

تتلخص بطريقتان:

1 الحذف بالجمع

2 الحذف بالتعويض

الحذف بالجمع

تتلخص هذه الطريقة بحذف أحد المجاهيل وذلك بتوحيد الأمثال بالنسبة للنظير وذلك بنفس طريقة توحيد مقامات الكسور:

(أمثال المجهول في المعادلة (1) هو نظير أمثال المجهول في المعادلة (2).

$$\begin{array}{c|c} 4x & -8y \\ -4x & 8y \end{array}$$

مثال:

$2x - y = 5 \quad (1) \quad (\times 1$

$x + y = 4 \quad (2) \quad (\times -2$

$$\begin{cases} 2x - y = 5 & (1) \\ -2x - 2y = -8 & (2) \end{cases}$$

بجمع المعادلتين طرفاً لطرف نجد

$$-3y = -3$$

الحذف بالتعويض

تتلخص هذه الطريقة باستنتاج معادلة ثالثة من إحدى المعادلتين وتعويضها في المعادلة الأخرى:

مثال:

$2x - y = 5 \quad (1)$

$x + y = 4 \quad (2)$

من المعادلة (2) نجد أن:

$x = 4 - y \quad (3)$

نعوض (3) في (1)

بيانياً

تتلخص في تمثيل المعادلتين بالرسم كمستقيمات

ولسهولة الحل نقسم أشكال المعادلات لثلاثة أشكال:

$ax + by = c \quad (1$

وهي معادلة مستقيم غير مار من المبدأ لتمثيلها بيانياً

x	0	
y		0

$y = mx \quad (2$

وهي معادلة مستقيم مار من المبدأ لتمثيلها بيانياً

x	0	1 أو المقام
y		

$ax + by = 0 \quad (3$

وهي معادلة مستقيم مار من المبدأ وتحول للشكل الثاني

x	0	1
y		

جبرياً

1 الحذف بالجمع :

حل جملة المعادلتين باستخدام طريقة الحذف بالجمع:

$$2x - y = 5 \quad (1)$$
$$x + y = 4 \quad (2)$$

الحل:

نلاحظ هنا أن أمثال x في المعادلة الأولى هو العدد 2 و أن أمثال x في المعادلة الثانية هو العدد 1 وبالتالي نحتاج لجعل العدد الأصغر نظير العدد الأكبر لذلك نضرب المعادلة الأولى بالعدد 1 لأنها تحوي المجهول ذو الأمثال الأكبر ونضرب المعادلة الثانية بالعدد 2- لأنها تحوي المجهول ذو الأمثال الأصغر

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \quad (1) \quad (\times 1 \\ x + y = 4 \quad (2) \quad (\times -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \quad (1) \\ -2x - 2y = -8 \quad (2) \end{cases}$$

بجمع المعادلتين طرفاً لطرف نجد أن:

$$-3y = -3 \Rightarrow \frac{-3y}{-3} = \frac{-3}{-3} \Rightarrow y = 1$$

بتعويض قيمة y في (2) نجد أن:

$$x + 1 = 4 \qquad x = 4 - 1 \qquad x = 3$$

وبالتالي فالثنائية $(3,1)$ حل لجملة المعادلتين.

2 الحذف بالتعويض :

حل جملة المعادلتين باستخدام طريقة الحذف بالتعويض:

$$2x - y = 5 \quad (1)$$
$$x + y = 4 \quad (2)$$

الحل:

من المعادلة (2) نجد أن:

$$x = 4 - y \qquad (3)$$

نعوض (3) في (1) فنجد أن:

$$2(4 - y) - y = 5 \Rightarrow 8 - 2y - y = 5$$
$$-2y - y = 5 - 8 \Rightarrow -3y = -3$$
$$\frac{-3y}{-3} = \frac{-3}{-3} \Rightarrow y = 1$$

بتعويض قيمة y في (3) نجد أن:

$$x = 4 - 1 = 3$$

وبالتالي فالثنائية $(3,1)$ حل لجملة المعادلتين.

اصطناع جملة معادلتين:

اشترت سارة ستة دفاتر وخمسة أقلام بمبلغ 570 ليرة. واشترى شقيقها سامر ثلاثة دفاتر وسبعة أقلام بمبلغ 555 ليرة. ما سعر الدفتر؟ وما سعر القلم؟

الحل:

نفرض عدد الدفاتر x.

نفرض عدد الأقلام y.

اشترت سارة ستة دفاتر وخمسة أقلام بمبلغ 570 ليرة.

$$6x + 5y = 570 \qquad (1)$$

واشترى شقيقها سامر ثلاثة دفاتر وسبعة أقلام بمبلغ 555 ليرة.

$$3x + 7y = 555 \qquad (2)$$

وبالتالي تتشكل لدينا جملة المعادلتين الآتيتين:

$$\begin{cases} 6x + 5y = 570 & (1) \\ 3x + 7y = 555 & (2) \end{cases}$$

نلاحظ هنا أن أمثال x في المعادلة الأولى هو العدد 6 و أن أمثال x في المعادلة الثانية هو العدد 3 وبالتالي نحتاج لجعل العدد الأصغر نظير العدد الأكبر لذلك نضرب المعادلة الأولى بالعدد 1 لأنها تحوي المجهول ذو الأمثال الأكبر ونضرب المعادلة الثانية بالعدد 2- لأنها تحوي المجهول ذو الأمثال الأصغر:

$$\begin{cases} 6x + 5y = 570 \\ -6x - 14y = -1110 \end{cases}$$

بجمع المعادلتين طرفاً لطرف نجد أن:

$$-9y = 540 \Rightarrow \frac{-9y}{-9} = \frac{540}{-9} \Rightarrow y = 60$$

بتعويض قيمة y في (2) نجد أن:

$$3x + 7(60) = 555 \quad 3x + 420 = 555$$

$$3x = 555 - 420 = 135 \Rightarrow 3x = 135$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{135}{3} \Rightarrow x = 45$$

أي أن
$x = 45$ **عدد الدفاتر**
$y = 60$ **عدد الأقلام**

ملاحظة هاااااااامة:

عندما يرد في نص المسألة كلمة نسبة أو نسبتيهما نحل تلك المسألة باستخدام التناسب أما عندما لا يحوي نص المسألة كلمة نسبة أو نسبتيهما نحل تلك المسألة باستخدام جملة معادلتين.

ملاحظة:

قد يكون السؤال عن ثنائية ما بصيغة (هل الثنائية حل لجملة المعادلتين) في هذه الحالة لانحل جملة المعادلتين بالخطوات السابقة وإنما نقوم بتعويض إحداثيات الثنائية في كلاً من معادلتي الجملة فإن حققت كلاً من معادلتيها (نتج عددان متساويان عند التعويض في كل معادلة) الثنائية حل لجملة المعادلتين وإن حققت إحدى معادلتيها فقط قلنا أنها ليست حلاً للجملة.

مثال

أي الثنائيات (-1,2) , (2,-1) , (-13,9) , (7,-3) حل:

1) المعادلة $2x + 3y = 1$.

2) المعادلة $3x + 5y = 6$.

3) للجملة:
$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 5y = 6 \end{cases}$$

الحل:

1) الثنائية (-1,2) ليست حلاً للمعادلة لأن:

$$2(-1) + 3(2) = 1 \Rightarrow -2 + 6 = 1 \Rightarrow 4 = 1$$

غير محققة.

الثنائية (2,-1) حلاً للمعادلة لأن:

$$2(2) + 3(-1) = 1 \Rightarrow 4 - 3 = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

محققة.

الثنائية (-13,9) حلاً للمعادلة لأن:

$$2(-13) + 3(9) = 1 \Rightarrow -26 + 27 = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

محققة.

الثنائية (7,-3) ليست حلاً للمعادلة لأن:

$$2(7) + 3(-3) = 1 \Rightarrow 14 - 9 = 1 \Rightarrow 5 = 1$$

غير محققة.

2) الثنائية (-1,2) ليست حلاً للمعادلة لأن:

$$3(-1) + 5(2) = 6 \Rightarrow -3 + 10 = 6 \Rightarrow 7 = 6$$

غير محققة.

الثنائية (2,-1) ليست حلاً للمعادلة لأن:

$$3(2) + 5(-1) = 6 \Rightarrow 6 - 5 = 6 \Rightarrow 1 = 6$$

غير محققة.

الثنائية (-13,9) حلاً للمعادلة لأن:

$$3(-13) + 5(9) = 6 \Rightarrow -39 + 45 = 6$$

$\Rightarrow\ 6=6$ محققة.

الثنائية (7,-3) ليست حلاً للمعادلة لأن:

$$2(7)+3(-3)=1 \Rightarrow 14-9=1 \Rightarrow 5=1$$

غير محققة.

3) نلاحظ أن الثنائية فقط (-13,9) حلاً للجملة لأنها تحقق كل من معادلتيها

بيانياً

ارسم المستقيمات التي تعطي التمثيل البياني للمعادلة الآتية .

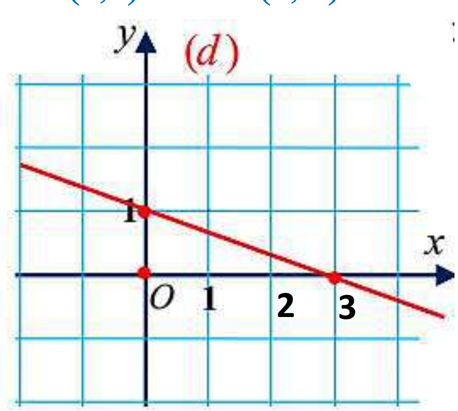
1) $d_1: x+3y=3$

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow 0+3y=3 \Rightarrow 3y=3 \Rightarrow y=1 \\ y=0 \Rightarrow x+3(0)=3 \Rightarrow x+0=3 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

x	0	3
y	1	0
النقاط	(0,1)	(3, 0)

وبالتالي فإن المستقيم d_1 مار بالنقاط:

A (0,1)   B (3, 0)



ملاحظة هامة:

عندما تكون إحدى إحداثيات الثنائية هي العدد صفر فإن المستقيم يمر بالعدد الآخر فمثلاً في المثال السابق نلاحظ أن:

المستقيم يمر بالنقطة (0,1) وبما أن $x = 0$ فإن المستقيم مرَ بالنقطة $y = 1$

و أن المستقيم يمر بالنقطة (3, 0) وبما أن $y = 0$ فإن المستقيم مرَ بالنقطة $x = 3$.

أما عندما تكون إحدى إحداثيات الثنائية هي عددين مختلفان عن الصفر فإن المستقيم يمر من نقطة تقاطعيهما كما سنلاحظ في المثال التالي.

حل جملة معادلتين خطيتين بيانياً

مثل جملة المعادلتين الآتيتين بيانياً:

$$\begin{cases} x+y=4 \\ 3x-y=0 \end{cases}$$

الحل:

$d_1: x+y=4$

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow 0+y=4 \Rightarrow y=4 \\ y=0 \Rightarrow x+0=4 \Rightarrow x=4 \end{cases}$$

x	0	4
y	4	0
النقاط	(0,4)	(4, 0)

وبالتالي فإن المستقيم d_1 مار بالنقاط:

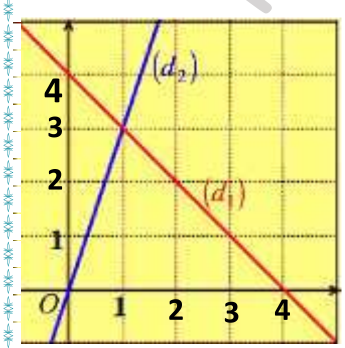
A (0,4)   B (4, 0)

$d_2: 3x-y=0 \qquad d_2: y=-3x$

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow y=3(0) \Rightarrow y=0 \\ x=1 \Rightarrow y=3(1) \Rightarrow y=3 \end{cases}$$

وبالتالي فإن المستقيم d_2 مار بالنقاط:

x	0	1
y	0	3
النقاط	(0,0)	(1, 3)



ملاحظة:

نقول عن جملتي معادلتين أنهما متكافئتان إذا كان لهما نفس الحلول أو إذا نتجت إحداهما عن الأخرى بقسمتها أو ضربها بعدد معين.

مثال:

الجملتان: $\begin{cases} 2(x+y)-3y=4 \\ x+2y=4 \end{cases}$ متكافئتان لأن:

$$\begin{cases} 2x-y=4 \\ 3x+6y=12 \end{cases}$$

لنجري تعديلات على الجملة الثانية:

من المعادلة الأولى:

$$2(x+y)-3y=4 \Rightarrow 2x+2y-3y=4$$
$$\Rightarrow 2x-y=4$$

وهي المعادلة الأولى في الجملة الثانية.

من المعادلة الثانية

$$3x+6y=12$$

بتقسيم طرفي المعادلة على العدد 3 نجد أن:

$$\frac{3x}{3}+\frac{6y}{3}=\frac{12}{3} \Rightarrow x+2y=4$$

وهي المعادلة الثانية في الجملة الثانية.

أي أن جملتي المعادلتين متكافئتان لأنهما متساويتان.

الوحدة الخامسة

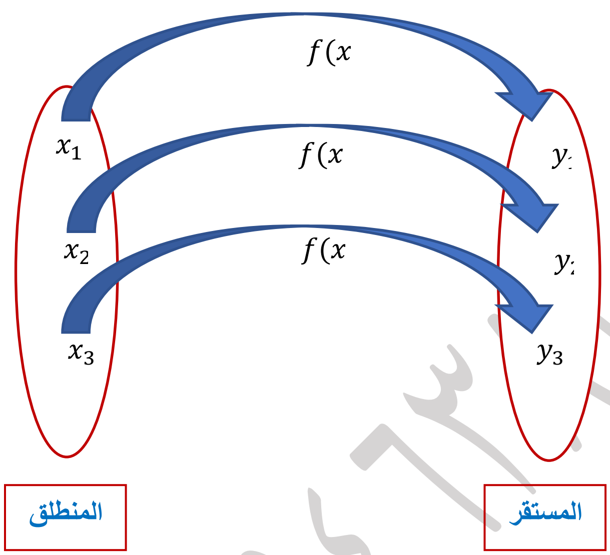
التابع

مفهـوم التابــع:

التابع f هو إجرائية تربط بكل قيمة للمتحول x عدداً واحداً $f(x)$.

بعبارة أخرى:

هو علاقة بين مجموعتين بحيث يرتبط كل عنصر من المجموعة الأولى بعنصر واحد فقط من المجموعة الثانية ونسمي المجموعة الأولى المنطلق والثانية المستقر كما أن كل عنصر من المنطلق يرتبط بعنصر واحد من المستقر وفق علاقة معينة تسمى قاعدة الربط.



ملاحظات:

- نسمي تابعاً للمتحول x كل إجرائية تربط بكل عدد x عدداً وحيداً $f(x)$.
- نسمي $f(x)$ صورة x وفق التابع f.
- أحياناً يرمز للتابع f بالشكل:

$$x \longmapsto f(x)$$

إعداد المدرس: محمد خوجه 0949946383

التابـــع

المستقر	قاعدة الربط (الصيغة)	المنطلق
مجموعة الفيم	العلاقة بين التابع والمحتوى $f(x)$	(مجموعة التعريف)

ونقرأ $f(x)$ كالتالي: صورة x وفق التابع f.

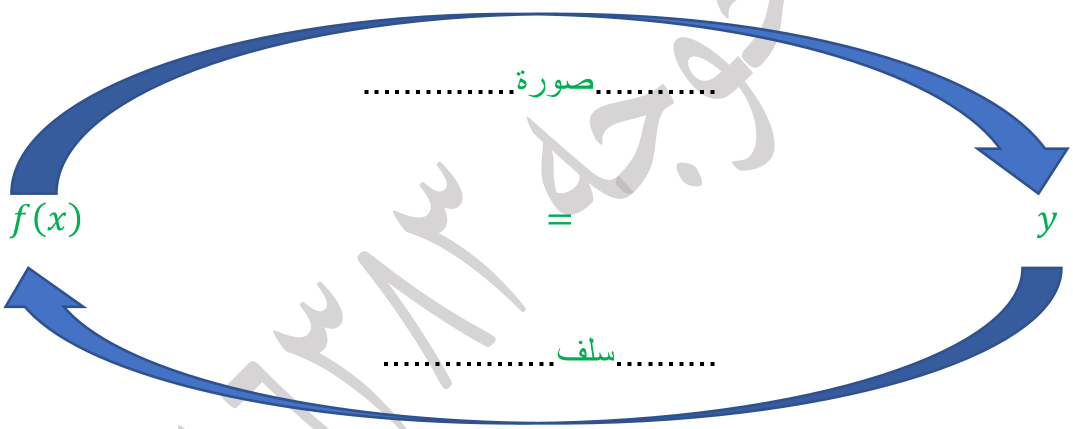
ملاحظة:

العلاقة $y = f(x)$ تعني أن y هي صورة x وفق التابع f. ونقول إن: x هو سلف ل y وفق التابع f.

مثال:

$f(x) = 9$ تقرأ: صورة x وفق التابع f تساوي 9.

ونقول إن: x هو سلف للعدد 9 وفق التابع f.



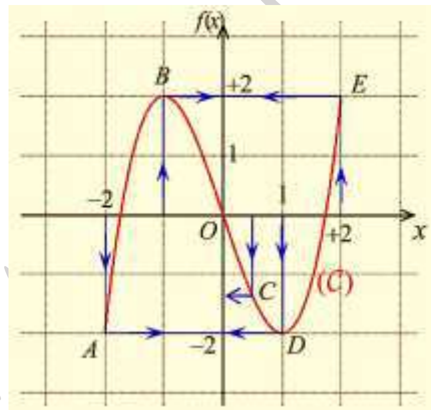
$f(x) = -8$

إعداد المدرس: محمد خوجة 0949946383

طرق تعريف التابع:

1 — 2 — 3

التعيين بالخط البياني



ملاحظات:

1) تتعين مجموعة تعريف التابع من خلال إسقاط كلاً من نقطة بداية ونقطة نهاية الخط البياني للتابع

[نهاية الخط البياني ، بداية الخط البياني]

2) كل قيمة للمتحول x تقابلها قيمة واحدة من $f(x)$.

3) كل نقطة من الخط البياني (c) فاصلتها قيمة المتحول x وترتيبها هو $f(x)$.

4) أحياناً لا يمكننا الحصول على قيم دقيقة لذلك نعطي قيماً تقريبية.

ملاحظة:

يرمز دوماً للخط البياني لأي تابع بالحرف c.

التعيين بالجدول

دائماً يعرف الجدول تابعاً يربط بكل عدد من السطر الأول عدداً من السطر الثاني

x	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	-5	-3	0	5.2	0	7

x_i	x_1	x_2	x_3
$f(x_i)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$

أو عدداً من العمود الأول بعدد من العمود الثاني

العمر	الطول
15	13.5
20	18
25	22.5
30	26
35	29
40	32
45	34
50	36

x_i	$f(x_i)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
x_3	$f(x_3)$

التعيين بصيغة معطاة

يكون التابع معطى بدلالة قاعدة الربط

$\xrightarrow{x}$

$f(x)=2x+1$

ملاحظات:

1) عندما يطلب إيجاد صورة عدد ما نقوم باستبدال x في الصيغة المعطاة بالعدد المعطى

مثال:

أوجد صورة العدد 2.

$f(x)=2x+1= 2(2)+1$
$=4+1=5$

2) عندما يطلب إيجاد أسلاف عدد ما نقوم باستبدال $f(x)$ بالعدد المعطى

مثال:

أوجد أسلاف العدد 5.

$f(x) = \underbrace{2x + 1}$

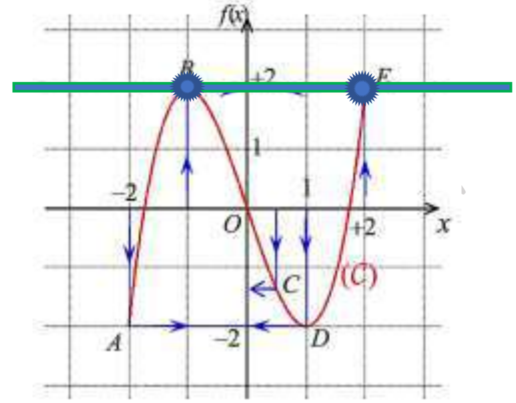
$5 = \underbrace{2x + 1} \Rightarrow 2x = 5 - 1$

$2x = 5 - 1 = 4 \Rightarrow x = 2$

1 التعيين بالخط البياني:

مثال:

في الشكل المرافق لدينا f التابع المعرف بالخط البياني (c) والمحدد بالنقطتين A و E والمطلوب:



1) أوجد مجموعة تعريف التابع f.

2) أوجد صور كلاً من الأعداد 2 , 1 ,0, -1 , -2 وفق التابع f.

3) أوجد أسلاف العدد 2.

الحل:

1) [نهاية الخط البياني ، بداية الخط البياني]

$[-2 \text{ ، } +2]$

$$2)\ f(-2) = -2 \quad , \quad f(-1) = +2$$
$$f(0) = 0 \quad , \quad f(1) = -2 \quad , \quad f(2) = +2$$

3) نرسم من النقطة $y = 2$ مستقيم فنلاحظ أنه يقطع الخط البياني للتابع f في نقطتان هما B و E وبإسقاط تلك النقطتان على محور الفواصل نجد أن أسلاف العدد 2 هما:

$$x = -1 \quad , \quad x = +2$$

2 التعيين بالجدول:

مثال:

يعرف الجدول المرافق تابعاً h يقرن طول شجرة صنوبر مقاساً بالمتر بعمرها مقاساً بالسنوات.

العمر	الطول
15	13.5
20	18
25	22.5
30	26
35	29
40	32
45	34
50	36

1) (1 انسخ ثم أكمل:

$h(50) =$ ... 36 ....

2) ما العدد a الذي يحقق

$h(a) = 22.5$

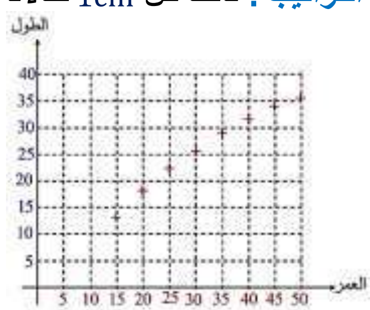
.... $a = 25$.............

2) مثل محتوى هذا الجدول في معلم ديكارتي.

تمثيل الجدول في معلم متجانس، يعطي هذا الجدول الطول بدلالة العمر، فالمتحول هو العمر.

على محور الفواصل : نأخذ كل 1cm للدلالة على خمس سنوات.

على محور التراتيب : نأخذ كل 1cm للدلالة على



3 التعيين بصيغة معطاة:

K هو التابع المعرف بالصيغة:

$$k(x) = 3x^2 - 5x + 4$$

1) احسب $k\left(-\frac{1}{2}\right)$

2) عين أسلاف العدد 4 أي قيم x التي تحقق $k(x) = 4$

الحل:

$$1)\ k\left(-\frac{1}{2}\right) = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 5\left(-\frac{1}{2}\right) + 4$$

$$= 3 \times \frac{1}{4} + \frac{5}{2} + 4 = \underset{(1)}{\frac{3}{4}} + \underset{(2)}{\frac{5}{2}} + \underset{(4)}{\frac{4}{1}}$$

إعداد المدرس: محمد خوجه 0949946383

$$= \frac{3}{4} + \frac{10}{4} + \frac{16}{4} = \frac{29}{4}$$

$2)\ k(x) = 4 \Rightarrow 3x^2 - 5x + 4 = 4$

$\Rightarrow 3x^2 - 5x + 4 - 4 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 5x = 0$

$\Rightarrow x[\frac{3x^2}{x} - \frac{5x}{x}] = 0 \Rightarrow x(3x - 5\,) = 0$

$\Rightarrow$ إما $x = 0$

أو $3x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

وبالتالي فإن أسلاف العدد 4 هما:

$x = 0$ و $x = \frac{5}{3}$

الوحدة السادسة

الإحتمالات

تعاريف:

- نقول إن تجربة هي تجربة احتمالية عندما يكون لها عدد من النتائج أو الإمكانات ولا نعرف أي تلك النتائج ستقع.
- نسمي كل نتيجة لهذه التجربة " حدثاً بسيطاً "
- يرمز للإحتمال بالرمز P.
- نسمي مجموعة النتائج " فضاء العينة" ونرمز له بالرمز " Ω ".

مثال:

في تجربة إلقاء قطعة نقود متجانسة مرة واحدة :

إما أن يظهر الوجة T (كتابة)
أو أن يظهر الوجه H (شعار)
} أحداث بسيطة

عندئذ يكون:

$$\Omega = \{\, T, H \,\}$$

- احتمال حدث بسيط هو عدد محصور بين العددين (0 و 1) أي أن:

$$0 \le p(A) \le 1$$

- مجموع احتمالات الأحداث البسيطة في أي تجربة عشوائية يساوي العدد 1

في تجربة إلقاء قطعة النقود السابقة:

$$p(T) = \frac{1}{2} \quad , \quad p(H) = \frac{1}{2}$$

$$p(T) + p(H) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

- الحدث غير قابل للحدوث نسميه " الحدث المستحيل " ونرمز له بالرمز Ø واحتماله يساوي ال 0 أي أن:

$$p(\emptyset) = 0$$

فمثلاً: في تجربة إلقاء جحر نرد:

احتمال ظهور وجة يحمل رقم 7 مثلا هو حدث مستحيل أي أنه حدث مستحيل ويكون:

$$p(7) = 0$$

- الحدث الذي لا بد من أن يتحقق نسميه " الحدث الأكيد " ونرمز له بالرمز Ω واحتماله يساوي ال 1 أي أن:

$$p(\Omega) = 1$$

ملاحظة:

لإيجاد احتمال أي حدث نطبق العلاقة:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

عدد الحالات المكنة

عدد الحالات الكلية

مثال:

في تجربة إلقاء قطعة نقود متجانسة مرة واحدة :

إما أن يظهر الوجه T (كتابة)
أو أن يظهر الوجه H (شعار)
عندئذ يكون:

$$\Omega = \{\underbrace{T, H}\}$$

نلاحظ أن عدد الحالات الممكنة 2

$$P(T) = \frac{n(T)}{n(\Omega)} = \frac{1}{2} \, , P(H) = \frac{n(H)}{n(\Omega)} = \frac{1}{2}$$

تمرين:

في تجربة إلقاء جحر نرد متجانس أوجد فضاء العينة:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

ثم أحسب احتمالات الأحداث الآتية:

1) الحدث A: الحصول على عدد فردي.

لدينا: $A = \{1,3,5\}$ عندئذ يكون:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2) الحدث B: الحصول على عدد زوجي.

لدينا: $B = \{2,4,6\}$ عندئذ يكون:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3) الحدث C: الحصول على عدد أولي.

لدينا: $C = \{2,3,5\}$ عندئذ يكون:

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

4) الحدث D: الحصول على عدد أكبر تماماً من 2.

لدينا: $D = \{3,4,5,6\}$ عندئذ يكون:

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

5) الحدث E: الحصول على عدد أكبر أويساوي العدد2.

لدينا: $E = \{2,3,4,5,6\}$ عندئذ يكون:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{5}{6}$$

6) الحدث F: الحصول على عدد أصغر تماماً من 5.

لدينا: $F = \{1,2,3,4\}$ عندئذ يكون:

$$P(F) = \frac{n(F)}{n(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

7) الحدث G: الحصول على عدد أكبر أويساوي العدد5.

لدينا: $G = \{5,6\}$ عندئذ يكون:

$$P(G) = \frac{n(G)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

8) الحدث H: الحصول على عدد أكبر تماماً من 2 و أصغر تماماً من 5 .

لدينا: $H = \{3,4\}$ عندئذ يكون:

$$P(H) = \frac{n(H)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

9) الحدث I: الحصول على عدد أكبر أويساوي من 2 و أصغر أويساوي من 5 .

لدينا: $I = \{2,3,4,5\}$ عندئذ يكون:

$$P(I) = \frac{n(I)}{n(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

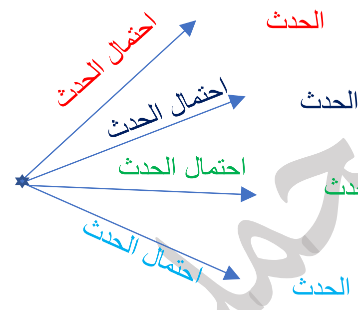
ملاحظة:

قد نعبر عن تجربة احتمالية بمخطط يسمى " **مخطط الشجرة** " والذي يكون عدد فروعه مساوياً لعدد النتائج البسيطة للتجربة الاحتمالية وفوق كل فرع يوضع إحتمال الحصول على الحدث البسيط الوافق لذلك الفرع.

ففي تجربة إلقاء قطعة نقود متجانسة فإن مخطط الشجرة لهذه التجربة يكون بالشكل:

شجرة النتائج الممكنة شجرة محملة بالاحتمالات

بشكل عام يكون لشجرة الإمكانات الشكل:



مثال صفحة 106:

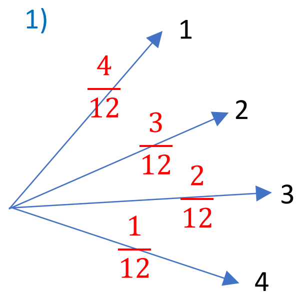
يحوي كيس 10كرات متماثلة، رقمت بالأرقام
.4 , 3,3, 2, 2, 2,1,1,1,1

نسحب من الكيس عشوائياً كرة ونقرأ رقمها.

1) ارسم شجرة الإمكانات وزود فروعها باحتمالات النتائج بصيغة كسور عشرية.

2) احسب احتمال الحدث A: «سحب كرة رقمها 2 على الأقل.

1)



$$P(1)=\frac{n(1)}{n(\Omega)}=\frac{4}{12}$$

$$P(2)=\frac{n(2)}{n(\Omega)}=\frac{3}{12}$$

$$P(3)=\frac{n(3)}{n(\Omega)}=\frac{2}{12}$$

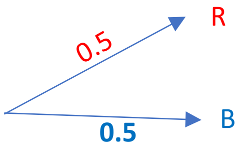
$$P(4)=\frac{n(4)}{n(\Omega)}=\frac{1}{12}$$

2) $P(A)=P(2)+P(3)+P(4)$
$$=\frac{3}{12}+\frac{2}{12}+\frac{1}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}=0.5$$

مثال:

تحوي جرة 4كرات متماثلة، اثنتان حمراوان (R)، واثنتان زرقاوان (B).

نسحب من الجرة عشوائياً كرةً ونتفقد لونها .ارسم شجرة الإمكانات لهذه اللعبة وزود فروعها بالاحتمالات.



$$p(R)=\frac{2}{4}=0.5$$

$$p(B)=\frac{2}{4}=0.5$$

مثال:

4) في كيس 8 كرات متماثلة كتبت عليها الأرقام:

2 و 3 و 4 و 5 و 6 و 7 و 8 و9.

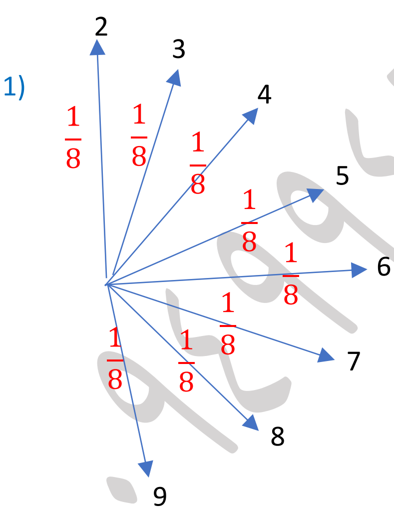
نسحب من الكيس عشوائياً واحدة من تلك الكرات.

1) ارسم شجرة الإمكانات ووضع الاحتمالات على فروعها.

2) ما احتمال الحصول على كرة تحمل رقماً فردياً؟

3) ما احتمال الحصول على كرة تحمل رقماً زوجياً؟

1)



2) نرمز للحدث الممثل الحصول على كرة تحمل رقماً فردياً بالرمز A فيكون:

2) $P(A)=P(3)+P(5)+P(7)+P(9)$
$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

3) نرمز للحدث الممثل الحصول على كرة تحمل رقماً زوجياً بالرمز B فيكون:

$$2)\ P(B) = P(2) + P(4) + P(6) + P(8)$$
$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

الحدثين المتنافيان

تعريف:

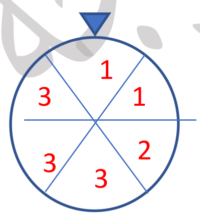
نقول عن حدثين أنهما **متنافيان** إذا استحال وقوعهما في آن معاً

ملاحظة:

إذا كان A و B حدثين متنافيين، كان احتمال «الحدث A أو B» مساوياً مجموع احتماليهما.

مثال:

في تجربة الدولاب المرفق، نتأمل الحدثين:



A « ظهور الرقم 1 »
B « ظهور عدد زوجي »

هذان الحدثان متنافيان. إذاً احتمال ظهور 1 أو عدد زوجي يساوي

$$p(A) + p(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

الحدثين المتعاكسان

تعريف:

نقول عن حدثين أنهما **متعاكسان** إذا كان كل منهما يعاكس الآخر في حدوثه

الحدث **المعاكس** لحدث A هو الحدث الذي يتحقق إن لم يتحقق A.نرمز إليه بالرمز $\bar{A}$ ونقول إن A و $\bar{A}$ متعاكسان (كل منهما يعاكس الآخر) ويكون:

$$p(A) + p(\bar{A}) = 1$$

ويمكن القول إن:

$$p(A) = 1 - p(\bar{A})$$

أو أن:

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

فكر:

ما الفرق بين الحدثين المتنافيان و الحدثين المتعاكسان؟

الحدثين المتنافيان:

إذا كان A و B حدثان متنافيان فإن:

$$A \cap B = \emptyset \text{ و } A \cup B \neq \Omega$$

أي أن:

إجتماعهما لا يعطي المجموعة الكلية وتقاطعهما هو مجموعة خالية.

مثال:

نلقي حجر نرد متجانس، أوجهه محملة بالأرقام:

1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6.

نعرف الأحداث الآتية:

A: « ظهور عدد أصغر أو يساوي 2 »
B: « ظهور عدد أكبر تماماً من 4 »

نلاحظ أن: $A: \{1,2\}$ و $B: \{5,6\}$ وأن:

$$A \cup B = \{1,2,5,6\} \neq \Omega$$

$$A \cap B = \emptyset$$

وبالتالي فإن الحدثان A و B حدثان متنافيان.

الحدثين المتعاكسان:

إذا كان A و B حدثان متعاكسان فإن:

$$A \cap B = \emptyset \text{ و } A \cup B = \Omega$$

أي أن:

إجتماعهما يعطي المجموعة الكلية وتقاطعهما هو مجموعة خالية.

مثال:

نلقي حجر نرد متجانس، أوجهه محملة بالأرقام:

1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6.

نعرف الأحداث الآتية:

A: « ظهور عدد فردي »
B: « ظهور عدد أكبر زوجي »

نلاحظ أن: A: $\{1,3,5\}$ ، B: $\{2,4,6\}$ وأن:

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega$$

$$A \cap B = \emptyset$$

وبالتالي فإن الحدثان A و B حدثان متعاكسان.

تحقق من فهمك صفحة 110:

نلقي حجر نرد متجانس، أوجهه محملة بالأرقام:

1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6.

نعرف الأحداث الآتية:

A: « ظهور عدد أصغر أو يساوي 2 »
B: «ظهور عدد أكبر تماماً من 4 »

1) الحدثان A و B متنافيان. لماذا؟ احسب احتمال A ثم احتمال B.

2) احسب احتمال الحدث E: « ظهور عدد n يحقق $n \le 2$ أو $n > 4$ »

الحل:

1) $A = \{1,2\}$, $B = \{5,6\}$

نلاحظ أن: $A \cap B = \emptyset$ لكن $A \cup B \neq \Omega$ وبالتالي فإن الحدثان A و B هما حدثان متنافيان أي أن:

$$p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad , \quad p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

2) $E = \{1,2,5,6\}$

$$p(E) = p(A) + p(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

تدرب صفحة 110:

في اللعبة الواردة في التمرين السابق، نعرف الحدثين الآتيين:

I: «ظهور عدد فردي »

J: «ظهور عدد زوجي »

1) الحدثان I و J متعاكسان. لماذا؟ احسب احتمال الحدث I.

2) احسب احتمال الحدث J بطريقتين مختلفتين.

الحل:

1) نلاحظ أن: I: $\{1,3,5\}$ ، J: $\{2,4,6\}$ وأن:

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega$$

$$A \cap B = \emptyset$$

وبالتالي فإن الحدثان I و J حدثان متعاكسان.

$$p(\mathrm{I}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2) طريقة أولى:

$$p(\mathrm{J}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

طريقة ثانية:

بما أن الحدثان I و J حدثان متعاكسان فإن:

$$p(\mathrm{J}) = 1 - p(\mathrm{I}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

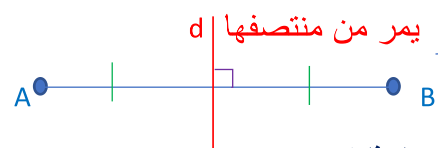
الهندسة

مراجعات عامة

➢ محور قطعة مستقيمة:

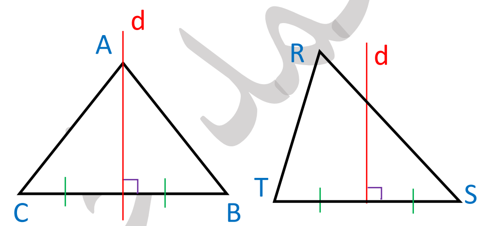
هو العمود على تلك القطعة و المار من منتصفها

نلاحظ أن المستقيم d يعامد القطعة المستقيمة [AB]
يمر من منتصفها



➢ محور ضلع في المثلث :

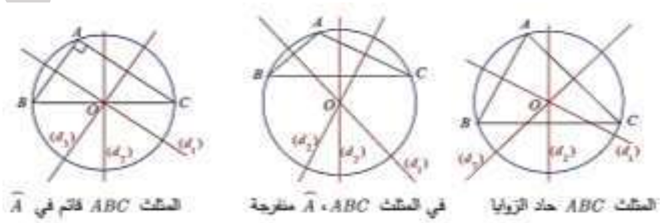
هو المستقيم العمودي على هذا الضلع في منتصفه.



خاصة:

المحاور الثلاثة في المثلث تلتقي في نقطة واحدة O.

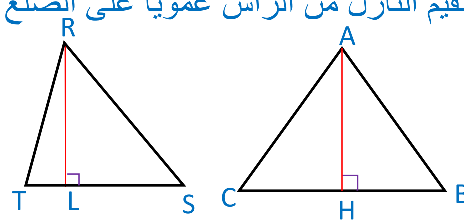
النقطة O هي مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث.



➢ ارتفاع المثلث:

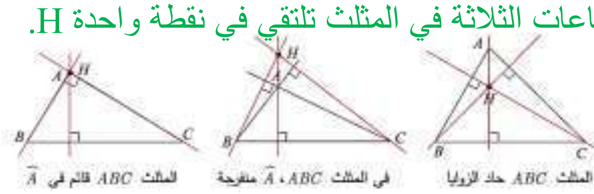
هو المستقيم المار بأحد رؤوسه **والعمودي** على الضلع المقابل لهذا الرأس. **بعبارة أخرى:**

هو المستقيم النازل من الرأس عمودياً على الضلع المقابلة.



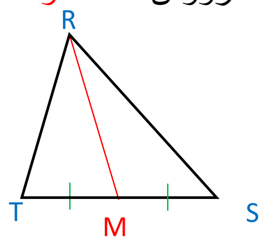
ملاحظة:

الارتفاعات الثلاثة في المثلث تلتقي في نقطة واحدة H.



➢ المتوسط في المثلث:

هو المستقيم المار بأحد رؤوس المثلث ومنتصف الضلع المقابلة لهذا الرأس.

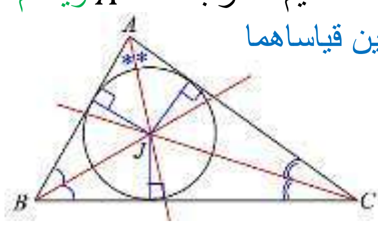


ملاحظة:

المتوسطات الثلاثة في المثلث تلتقي في نقطة واحدة Γ تسمى هذه النقطة مركز ثقل المثلث.

➢ منصف زاوية في المثلث:

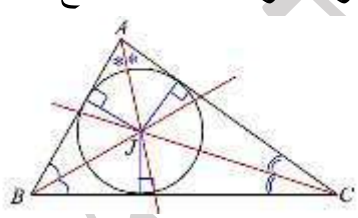
منصف الزاوية $\hat{A}$ هو المستقيم المار بالنقطة A ويقسم هذه الزاوية إلى زاويتين قياساهما متساويان.



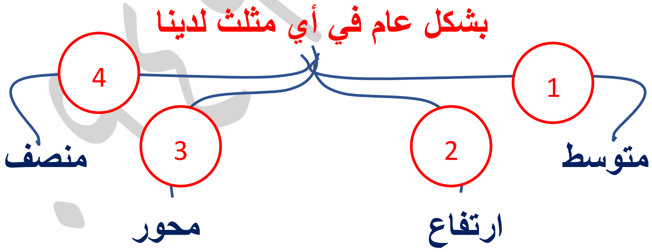
خاصة:

المنصفات الثلاثة لزوايا المثلث تلتقي في نقطة واحدة J.

النقطة J هي **مركز الدائرة** الماسة لأضلاع المثلث داخلاً.



بشكل عام في أي مثلث لدينا



ملاحظة

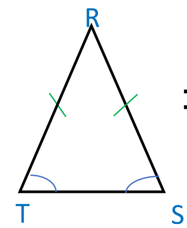
- في المثلث متساوي الساقين يسمى الإرتفاع النازل من الرأس محور ومنصف ومتوسط

- في المثلث متساوي الأضلاع ماذا يسمى الإرتفاع النازل من الرأس محور ومنصف ومتوسط

ملاحظات:

1) مجموع قياسات زوايا أي مثلث 180°

2) في المثلث متساوي الساقين تكون زاويتا القاعدة متساويتان



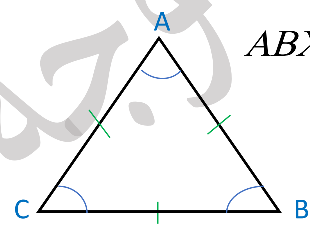
في المثلث المتساوي الساقين RST لدينا:

$\hat{T} = \hat{S}$

3) في المثلث متساوي الأضلاع تكون:

1 أطوال الأضلاع متساوية

2 قياسات زواياه متساوية قياس كل منها 60°



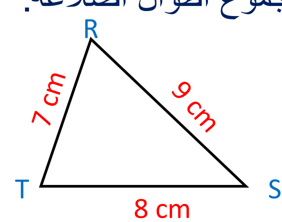
في المثلث المتساوي الأضلاع ABX

لدينا: $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$

$AB = AC = BC$

4) محيط المثلث هو عبارة عن مجموع أطوال أضلاعه.

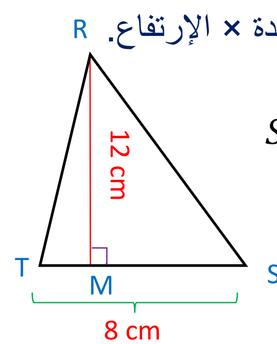
مثال:



محيط المثلث RST

$P = 7 + 8 + 9 = 24 \text{ cm}$

5) مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × القاعدة × الإرتفاع.



$$S(RST) = \frac{1}{2} \times ST \times RM$$

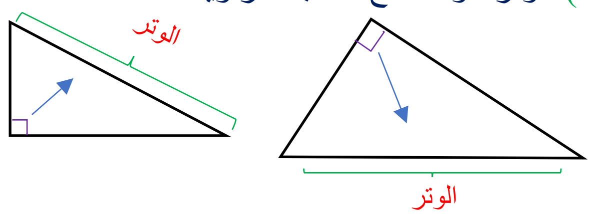
$$= \frac{1}{\cancel{2}} \times \overset{4}{\cancel{8}} \times 12$$

$$= 4 \times 12 = 36cm^2$$

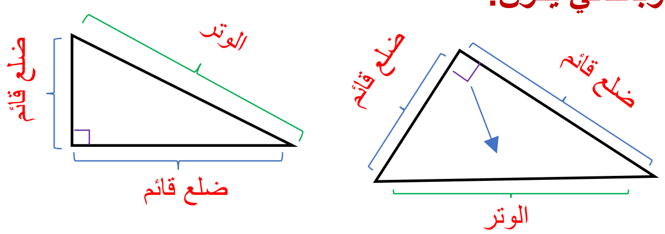
6) في المثلث القائم:

1) الضلع القائم هو الضلع المشكل للزاوية القائمة.

2) الوتر هو الضلع المقابل للزاوية القائمة.

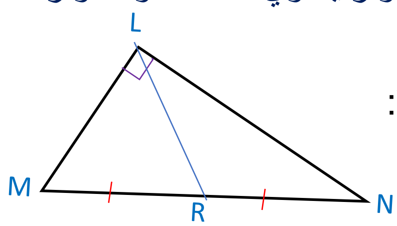


وبالتالي يكون:



3) الوتر هو أطول أضلاع المثلث القائم.

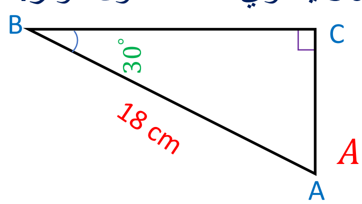
4) المتوسط المتعلق بالوتر يساوي نصف طول الوتر وبالعكس.



في المثلث LMN لدينا:

$$LR = \frac{1}{2} \times MN$$

5) الضلع المقابل للزاوية 30° يساوي نصف طول الوتر.



في المثلث ABC لدينا:

$$AC = \frac{1}{2} \times AB = 9cm$$

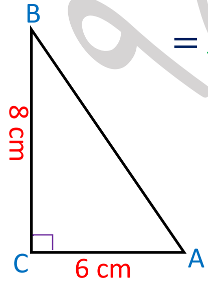
6) مساحة المثلث القائم = $\frac{1}{2}$ × **جداء** طولي الضلعين **القائمتين.**

مثال/1/:

$$S(ABC) = \frac{1}{2} \times AC \times BC$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \times 3 \times \overset{2}{\cancel{4}} = 3 \times 2 = 6cm^2$$

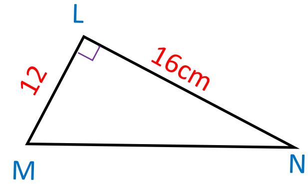
مثال/2/:



$$S(ABC) = \frac{1}{2} \times AC \times BC$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \times \overset{3}{\cancel{6}} \times 8 = 3 \times 8 = 24cm^2$$

مثال/3/:



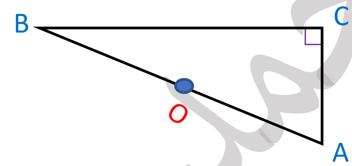
$$S(ABC) = \frac{1}{2} \times LM \times LN$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \times \overset{6}{\cancel{12}} \times 16 = 6 \times 16 = 96cm^2$$

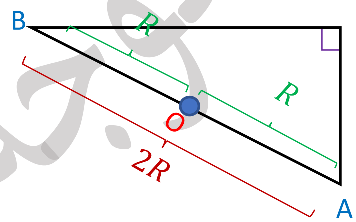
6) مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث القائم يقع منتصف الوتر.

مثال:

مركز الدائرة المارة برؤوسالمثلث الموضح بالرسم يقع الوترAB :

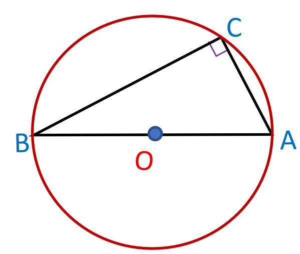


7) وترالمثلث القائم هو قطر الدائرة المارة بروؤسة أي أن نصف قطر الدائرة المارة برؤس مثلث قائم هو نصف طول وتر هذا المثلث.

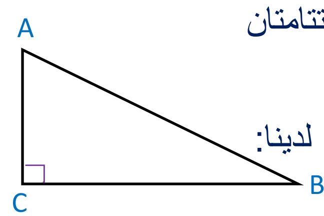


$$R \begin{cases} = \frac{1}{2} \times AB \\ = \frac{AB}{2} \end{cases}$$

وبالعكس: كل مثلث قطره وتر في دائرة يكون مثلث قائم.



8) الزاويتان غير القائمتان متتامتان



مثال:

في المثلث ABC القائم في $\hat{C}$ لدينا:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{B} + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ - 90^\circ$$

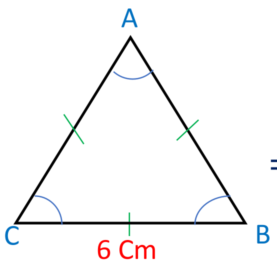
$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = 90^\circ$$

7) مساحة المثلث متساوي الأضلاع تساوي:

$\frac{\sqrt{3}}{4}$ × مربع طول الضلع.

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

مثال:



$$S(ABC) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (6)^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\cancel{4}} \times \overset{12}{\cancel{36}} = \sqrt{3} \times 12$$

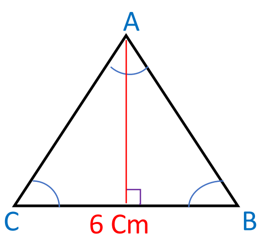
$$= 12\sqrt{3} cm^2$$

8) طول ارتفاع المثلث متساوي الأضلاع يساوي:

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ × طول الضلع.

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

مثال:



$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \times a = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \times \cancel{6}$$

$$= \sqrt{3} \times 3 = 3\sqrt{3} cm$$

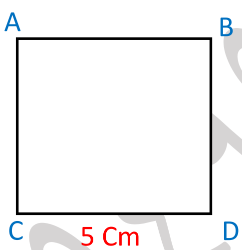
9) محيط المربع تساوي 4 × طول الضلع.

$$P = 4 \times a$$

10) مساحة المربع هو تساوي مربع طول الضلع.

$$S = a^2$$

مثال:



ABCD مربع طول ضلعه 5 Cm أحسب كلاً من مساحته / محيطه

$$P = 4 \times a = 4 \times 5 = 20cm$$

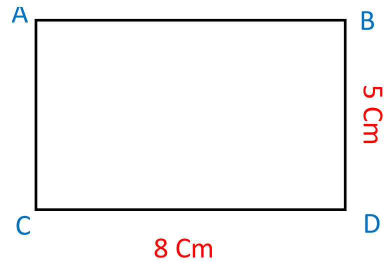
$$S = a^2 = (5)^2 = 25cm^2$$

11) محيط المستطيل يساوي 2×(الطول + العرض).

12) مساحة المستطيل يساوي الطول × العرض.

مثال:

AB CD مستطيل بعداه:
5 Cm , 8cm



أحسب كلاً من] مساحته
محيطه

$$P = 2(5+8) = 2(13) = 26cm$$

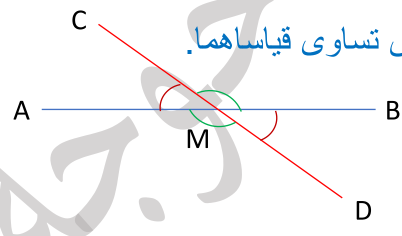
$$S = 5 \times 8 = 40\ cm^2$$

13) الزاويتان المتقابلتان بالرأس:

نقول عن زاويتين أنهما متقابلتان بالرأس إذا كانتا تشتركان برأس واحد وضلعا أحدهما إمتداد لضلعي الأخرى.

خاصة:

إذا تقابلت زاويتان بالرأس تساوى قياساهما.

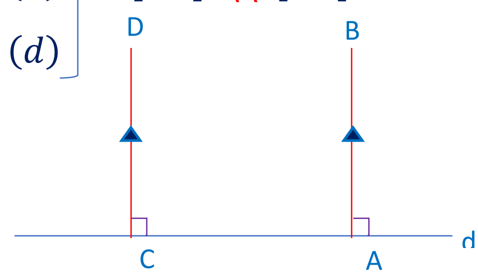


$$\widehat{AMC} = \widehat{BMD}$$

$$\widehat{AMD} = \widehat{BMC}$$

13) العمودان عل مستقيم واحد متساويان.

$$\left.\begin{array}{l}[AB] \perp (d) \\ [CD] \perp (d)\end{array}\right\} \Rightarrow [AB] \parallel [CD]$$



13) القول إن $\hat{A}$ و $\hat{B}$ **متتامتان** يكافئ:

$$\hat{A} + \hat{B} = 90^{\circ}$$

14) القول إن $\hat{A}$ و $\hat{B}$ **متكاملتان** يكافئ:

$$\hat{A} + \hat{B} = 180^{\circ}$$

ملاحظة:

قبل البدء بحل مسألة الهندسة وأثناء قراءتها دون معطيات المسألة " الأطوال و قياسات الزوايا " قبل حل المسألة وعلى الرسم لتساعدك في تركيز انتباهك

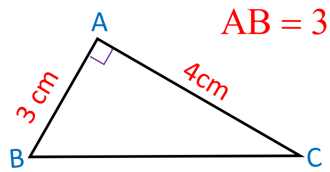
مبرهنة فيثاغورث:

في المثلث القائم مجموع **مربعي** طولي الضلعين القائمتين يساوي **مربع** طول الوتر.

مثال:

ABC مثلث قائم في $\hat{A}$ فيه:

AB = 3 Cm , AC =4 Cm



أحسب طول الوتر BC

الحل:

بحسب مبرهنة فيثاغورث نجد أن:

$$(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$$

$$(3)^2 + (4)^2 = (BC)^2$$

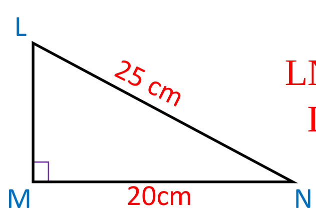
$$(BC)^2 = 9 + 16 = 25 \xrightarrow{\text{بالجذر نجد}} BC = 5cm$$

مثال:

LMN مثلث قائم في $\widehat{M}$ فيه:

LN = 25cm, MN =20cm

أحسب طول الضلع LM



الحل:

بحسب مبرهنة فيثاغورث نجد أن:

$$(LM)^2 + (MN)^2 = (LN)^2$$

$$(LM)^2 + (20)^2 = (25)^2$$

$$(LM)^2 + 400 = 625$$

$$(LM)^2 = 625 - 400 = 225$$

$$(LM)^2 = 225 \xrightarrow{\text{بالجذر نجد}} LM = 15cm$$

عكس مبرهنة فيثاغورث:

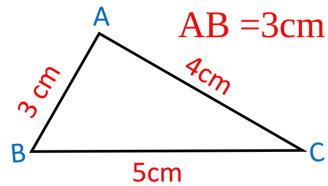
يكون المثلث قائماً إذا كان: مجموع **مربعي** طولي ضلعين فيه يساوي **مربع** طول الضلع الثالث.

مثال:

ABC مثلث فيه:

AB =3cm , AC =4cm , BC =5cm

هل هذا المثلث قائم؟



الحل:

حتى يكون هذا المثلث قائما يجب أن يتحقق عكس مبرهنة فيثاغورث أي يجب أن يكون:

$$(AB)^2+(AC)^2=(BC)^2$$

$$L_1=(AB)^2+(AC)^2=(3)^2+(4)^2$$

$$L_1=9+16=25$$

$$L_2=(BC)^2=(5)^2=25$$

وبالتالي يكون: $L_1=L_2$ أي أن المثلث قائماً في $\hat{A}$.

ملاااااحظة:

نستخدم **مبرهنة فياغورث** عندما يرد في نص المسألة أن المثلث قائم.

نستخدم **عكس مبرهنة فيثاغورث** عندما يكون المطلوب إثبات أن المثلث قائم.

التناسب

تعريف:

يعرف التناسب على أنه مساواة بين نسبتين. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

حيث أن الأعداد $(b$ و $d)$ غير معدومة.

نسمي الأعداد $(a$ وb وc و$d)$ أعداد متناسبة.

نسمي العددين $(a$ و $d)$ طرفي التناسب.

نسمي العددين $(c$ و $b)$ وسطي التناسب.

لإيجاد قيمة أي مجهول من ناتج تناسب نستخدم العلاقة:

جداء الطرفين = جداء الوسطين

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow a\times d=b\times c$$

مثال:

أوجد قيمة x من فيما يأتي:

1) $\frac{x}{5}=\frac{1}{7} \Rightarrow x\times 7=1\times 5 \Rightarrow 7x=5 \quad x=\frac{5}{7}$

2) $\frac{x}{2}=\frac{3}{8} \Rightarrow x\times 8=2\times 3 \Rightarrow 8x=6$

$$\Rightarrow x=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

خواص:

في أي تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$:

1) إذا قلبنا النسبتين نحصل على تناسب جديد:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow{\text{تناسب جديد}} \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

$$\frac{3}{4}=\frac{7}{9} \xrightarrow{\text{تناسب جديد}} \frac{4}{3}=\frac{9}{7}$$

2) إذا بادلنا طرفي نحصل على تناسب جديد:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow{\text{تناسب جديد}} \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$$

$$\frac{3}{4}=\frac{7}{9} \xrightarrow{\text{تناسب جديد}} \frac{9}{4}=\frac{7}{3}$$

3) إذا بادلنا وسطي نحصل على تناسب جديد:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow{\text{تناسب جديد}} \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

$$\frac{3}{4}=\frac{7}{9} \xrightarrow{\text{تناسب جديد}} \frac{3}{7}=\frac{4}{9}$$

4) إذا ثبتنا المقامين وأضفنا كل مقام للبسط الموافق له نحصل على تناسب جديد:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow{\text{تناسب جديد}} \frac{a+c}{c}=\frac{b+d}{d}$$

$$\frac{3}{4}=\frac{7}{9} \xrightarrow{\text{تناسب جديد}} \frac{3+4}{4}=\frac{7+9}{9}$$

5) إذا ثبتنا المقامين وطرحنا كل مقام للبسط الموافق له نحصل على تناسب جديد:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow{\text{تناسب جديد}} \frac{a-c}{c}=\frac{b-d}{d}$$

$$\frac{3}{4}=\frac{7}{9} \xrightarrow{\text{تناسب جديد}} \frac{3-4}{4}=\frac{7-9}{9}$$

6) إذا ثبتنا البسطين وأضفنا كل بسط للمقام الموافق له نحصل على تناسب جديد:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow{\text{تناسب جديد}} \frac{a}{c+a}=\frac{b}{d+b}$$

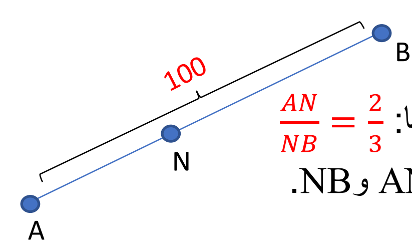
$$\frac{3}{4}=\frac{7}{9} \xrightarrow{\text{تناسب جديد}} \frac{3}{4+3}=\frac{7}{9+7}$$

7) إذا ثبتنا البسطين وطرحنا كل بسط من المقام الموافق له نحصل على تناسب جديد:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow{\text{تناسب جديد}} \frac{a}{c-a}=\frac{b}{d-b}$$

$$\frac{3}{4}=\frac{7}{9} \xrightarrow{\text{تناسب جديد}} \frac{3}{4-3}=\frac{7}{9-7}$$

مثال:



في الشكل المجاور لدينا: $\frac{AN}{NB}=\frac{2}{3}$

أحسب طول كلاً من AN وNB.

الحل:

من الرسم الموضح نجد أن: $AN+NB=100 \quad (1)$

لدينا: $\frac{AN}{NB}=\frac{2}{3}$ نثبت المقام ونضيفه للبسط فنجد أن:

$$\frac{AN+NB}{NB}=\frac{2+3}{3} \Rightarrow \frac{100}{NB}=\frac{5}{3}$$

$$NB=\frac{100\times 3}{5}=\frac{300}{5}=60$$

بتعويض قيمة NB في العلاقة (1) نجد أن:

$$AN+NB=100 \Rightarrow AN+60=100$$

$$AN=100-60=40$$

$$AN=40 \quad , \quad NB=60$$

2) جد عددين موجبين مجموعهما 27 ونسبتهما $\frac{1}{2}$

الحل:

نفرض العدد الأول a

نفرض العدد الثاني b

عندئذ يكون:

مجموعهما 27: $a+b=27 \quad (1)$

ونسبتهما $\frac{1}{2}$: $\frac{a}{b}=\frac{1}{2} \quad (2)$

لدينا: $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$ نثبت المقام ونضيفه للبسط فنجد أن:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{1+2}{2} \Rightarrow \frac{27}{b}=\frac{3}{2} \Rightarrow b=\frac{2\times 27}{3}$$

$$\Rightarrow b=\frac{54}{3}=18 \Rightarrow b=18$$

بتعويض قيمة b في العلاقة (1) نجد أن:

$$a+b=27 \Rightarrow a+18=27$$

$$\Rightarrow a=27-18=9 \Rightarrow a=9$$

العدد الأول $a=9$ و العدد الثاني $b=18$

النسب المثلثية لزاوية حادة

النسب المثلثية

tan ظل

cos تجيب — sin جيب

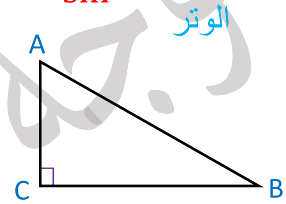
cos: مجاور / وتر — sin: مقابل / وتر

$$\tan = \frac{\sin}{\cos} \quad (1)$$

$$= \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} \quad (2)$$

$$\cos = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \quad \text{و} \quad \sin = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

مثال:



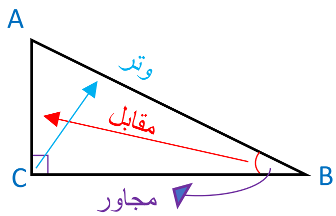
في المثلث ABC نلاحظ أن:

AB هو الضلع المقابل القائمة وبالتالي فهو الوتر

بالنسبة للزاوية $\hat{B}$

الضلع AC مقابل

الضلع BC مجاور



وبالتالي يكون:

$$\sin\hat{B} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{AC}{AB} \quad , \cos\hat{B} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\tan\hat{B} = \frac{\sin}{\cos} = \frac{\frac{AC}{AB}}{\frac{BC}{AB}} = \frac{AC \times \cancel{AB}}{BC \times \cancel{AB}} = \frac{AC}{BC} \quad (1)$$

$$= \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{AC}{BC} \quad (2)$$

ملاحظات:

1) النسب المثلثية ليس لها وحدات قياس.

2) النسب المثلثية **لزاوية حادة** هي أعداد موجبة تماماً لكون كل منها نسبة طولين.

3) نعلم أن وتر المثلث القائم هو أطول أضلاعه، ففي المثلث ABC القائم في $\hat{A}$ يكون

كيفية إيجاد طول ضلع مجهول في مثلث قائم

نميز ثلاث حالات

1

ضلعان معلومان وثالث مجهول

نستخدم مبرهنة فيثاغورث

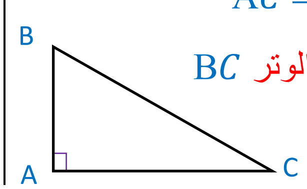
مثال:

ABC مثلث قائم في $\hat{A}$ فيه:

AB $= 3\ cm$

AC $= 4\ cm$

أحسب طول الوتر BC



2

ضلع معلوم ونسبة مثلثية

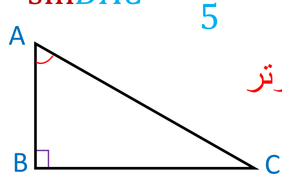
نستخدم النسب المثلثية

مثال:

ABC مثلث قائم في $\hat{B}$ فيه:

$BC = 8cm \qquad \sin\widehat{BAC} = \frac{4}{5}$

أحسب طول الوتر



3

ضلع معلوم وزازية شهيرة

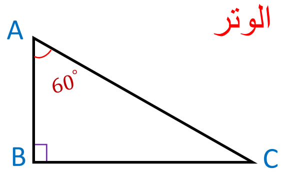
نستخدم جدول النسب الشهيرة

مثال:

ABC مثلث قائم في $\hat{B}$ فيه:

$BC = 8cm \qquad \widehat{BAC} = 60^{\circ}$

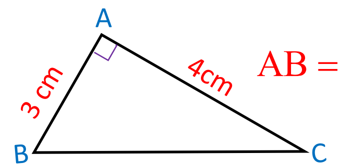
أحسب طول الوتر



1 ضلعان معلومان وثالث مجهول :

مثال:

ABC مثلث قائم في $\hat{A}$ فيه:



$AB = 3$ Cm , $AC = 4$ Cm

أحسب طول الوتر BC

الحل:

بحسب مبرهنة فيثاغورث نجد أن:

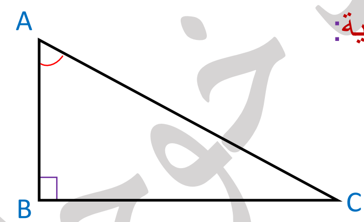
$$(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$$

$$(3)^2 + (4)^2 = (BC)^2$$

$$(BC)^2 = 9 + 16 = 25 \xrightarrow{\text{بالجذر نجد}} BC = 5cm$$

2 ضلع معلوم ونسبة مثلثية:

مثال :



ABC مثلث قائم في $\hat{B}$ فيه:

$$\sin\widehat{BAC} = \frac{4}{5} \quad , \quad BC = 8cm$$

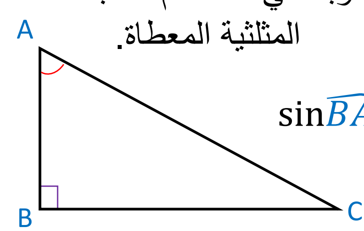
أحسب طول الوتر

الحل:

8cm

نلاحظ هنا أنه لدينا:

$\left\{\begin{array}{l}\text{ضلع معلوم ونسبة مثلثية} \\ \text{نستخدم النسب المثلثية}\end{array}\right.$ وبالتالي لنستخدم النسبة المثلثية المعطاة.



لدينا: $\sin\widehat{BAC} = \frac{4}{5} \quad (1)$

ومن المثلث ABC نجد أن:

$$\sin\widehat{BAC} = \frac{BC}{AC} = \frac{8}{AC} \quad (2)$$

بالمقارنة بين (1) و (2) نجد أن:

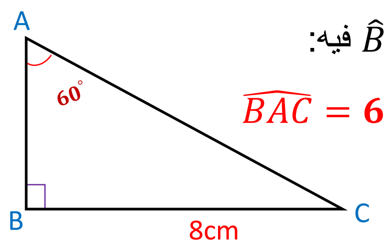
$$\frac{8}{AC} = \frac{4}{5} \Rightarrow AC = \frac{5 \times 8}{4} = \frac{40}{4} = 10cm$$

جدول النسب المثلثية لزاويا شهيرة

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

3 ضلع معلوم وزازية شهيرة

مثال:



ABC مثلث قائم في $\hat{B}$ فيه:

$$\widehat{BAC} = 60^\circ \quad , \quad BC = 8cm$$

أحسب الطول AC

الحل:

ملاحظة:

يتضح من الرسم أن الضلع المعلوم BC هو بالنسبة للزاوية المعطاة $\widehat{BAC}$ الضلع المقابل وبالتالي يجب اختيار النسبة المثلثية التي تحوي الضلع المقابل وبالتالي لنأخذ sin الزاوية $\widehat{BAC}$.

من المثلث ABCنجد أن:

$$\sin\widehat{BAC} = \frac{BC}{AC}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{8}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{AC}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{2 \times 8}{\sqrt{3}} = \frac{16}{\sqrt{3}} cm$$

علاقتان مهمتان بين النسب المثلثية

1

$$sin^2\theta + cos^2\theta = 1$$

تستخدم عندما يعطينا نسبة معلومة ويطلب إيجاد النسبة الأخرى .

مثال:

لتكن θ زاوية حادة تحقق: $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ أوجد $\sin\theta$

ملاحظة:

تستخدم العلاقة السابقة لإيجاد $\sin\theta$ أو $cos\theta$ **فقط**.

مثال:

لتكن θ زاوية حادة تحقق: $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ أوجد $\sin\theta$

الحل:

نعلم أن:

$$sin^2\theta + cos^2\theta = 1$$

$$sin^2\theta + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow sin^2\theta + \frac{3}{4} = 1$$

$$sin^2\theta = 1 - \frac{3}{4} \Rightarrow sin^2\theta = \frac{4-3}{4}$$

$$sin^2\theta = \frac{1}{4} \Rightarrow sin\,\theta = \frac{1}{2}$$

2

$$\tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta}$$

تستخدم عندما يعطينا نسبتين معلومتين ويطلب إيجاد النسبة الثالثة.

مثال:

لتكن θ زاوية حادة تحقق: $\sin\theta = \frac{1}{2}$, $cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

أوجد $\tan\theta$

ملاحظة:

تستخدم لإيجاد $\sin\theta$ أو $cos\theta$ أو $\tan\theta$.

مثال:

لتكن θ زاوية حادة تحقق: $\sin\theta = \frac{1}{2}$, $cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

أوجد $\tan\theta$.

الحل:

نعلم أن: $\tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta}$

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \tan\theta = \frac{1\times\cancel{2}}{\cancel{2}\times\sqrt{3}}$$

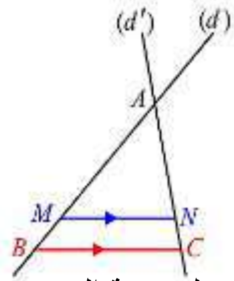
$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

الوحدة الثانية

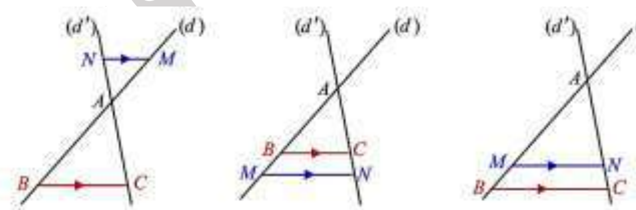
مبرهنة النسب الثلاث

(d) و (d') مستقيمان متقاطعان في A
النقطتان B و M من (d) مختلفتان عن A.
النقطتان C و N من (d') مختلفتان عن A أيضاً.
إذا كان (BC) و (MN) متوازيين كان:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$



الأشكال الثلاثة الآتية تُظهر ثلاث حالات لمبرهنة النسب الثلاث وفي كل منها المستقيمان المتوازيان (BC) و (MN) يقطعان المستقيمين (d) و (d') المتقاطعين في A.



ملاحظة:

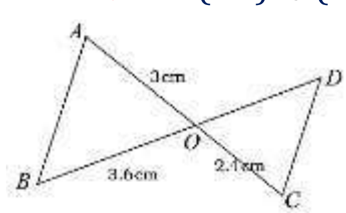
إذا كان (BM) و (CN) متقاطعين في A وكان:

$$\frac{AM}{AB}\neq\frac{AN}{AC}$$

كان المستقيمان (BC) و (MN) **غيرمتوازيين**

مثال:

في الشكل المستقيمان (AB) و (CD) **متوازيان**.
احسب الطول OD.



الحل:

نلاحظ أن المستقيمان (BD) و (AC) متقاطعين في Q
المستقيمان (AB) و (CD) **متوازيان**

وبالتالي بحسب مبرهنة النسب الثلاث نجد أن:

$$\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}$$

باتعويض نجد:

$$\frac{3}{2.4}=\frac{3.6}{OD}=\frac{AB}{CD}$$

(1) (2) (3)

من النسبتين (1) و (2) نجد:

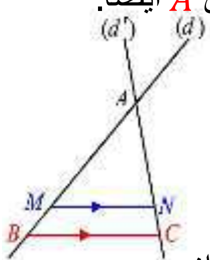
$$\frac{3}{2.4}=\frac{3.6}{OD}\Rightarrow OD=\frac{2.4\times\cancel{3.6}}{\cancel{3}}$$
$$=2.4\times1.2$$
$$=2.88cm$$

عكس مبرهنة النسب الثلاث

(d) و (d') مستقيمان متقاطعان في A
النقطتان B و M من (d) مختلفتان عن A.
النقطتان C و N من (d') مختلفتان عن A أيضاً.

وكان:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$$

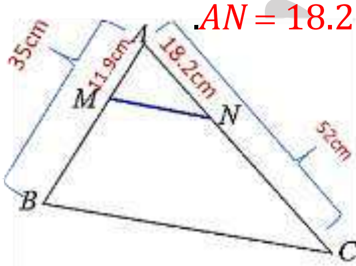


كان المستقيمان (BC) و (MN) متوازيين.

مثال/1/:

في الشكل المرافق $AB=35cm$ و $AC=52cm$
و $AM=11.9cm$ و $AN=18.2cm$.

أثبت أن المستقيمين (AC)
و (BD) **غير متوازيين**



الحل:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{11.9\times10}{35\times10}=\frac{119}{350}=0.34$$
$$\frac{AN}{AC}=\frac{18.2\times10}{52\times10}=\frac{182}{520}=0.35 \Rightarrow \frac{AM}{AB}\neq\frac{AN}{AC}$$

وبالتالي فإن المستقيمان (AC) و (BD) غير متوازيين.

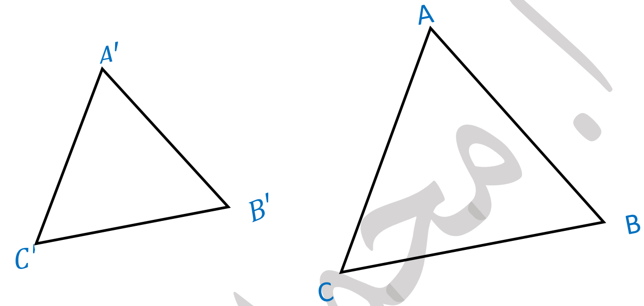
التشابه

تعريف:

نقول عن مثلثين أنهما متشابهان إذا تناسبت أطوال أضلاع المثلث الأول **مع مقابلاتها** من المثلث الثاني.

توضيح:

نقول عن المثلثان ABC و $A'B'C'$ أنهما متشابهان إذا كان:



$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AB}{A'B'} = k \\ \dfrac{AC}{A'C'} = k \\ \dfrac{BC}{B'C'} = k \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$$

ونقول إن:
- المثلث ABC تكبير للمثلث $A'B'C'$
- أو المثلث $A'B'C'$ تصغير للمثلث ABC
- أو المثلثان ABC و $A'B'C'$ طبوقان.

حيث نسمي النسبة بين الضلعين المتقابلين (**نسبة التشابه**) ونرمز

1

$k > 1$

عندئذ تكون k نسبة **تكبير** المثلث ABC تكبير للمثلث $A'B'C'$

2

$0 < k < 1$

عندئذٍ تكون k نسبة **تصغير** المثلث $A'B'C'$ تصغير للمثلث ABC

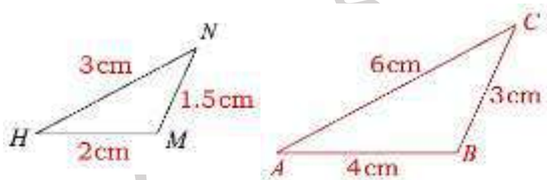
3

$k = 1$

عندئذ تكون k نسبة **تطابق** المثلثان ABC و $A'B'C'$ طبوقا

مثال:

تأمل الشكلين الآتيين وأحسب كلاً من: $\frac{HM}{AB}$ و $\frac{NM}{CB}$ و $\frac{NH}{CA}$ هل المثلثان ABC و HMN متشابهان؟



الحل:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{NH}{CA} = \dfrac{3 \div 3}{6 \div 3} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{NM}{CB} = \dfrac{1.5 \times 10}{3 \times 10} = \dfrac{15 \div 15}{30 \div 15} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{HM}{AB} = \dfrac{2 \div 2}{4 \div 2} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{NH}{CA} = \frac{NM}{CB} = \frac{HM}{AB} = \frac{1}{2}$$

وبالتالي فإن المثلث HMN هو **تصغير** للمثلث ABC أي أن المثلثان ABC و HMN متشابهان

خواص:

1) نسبة محيطي شكلين متشابهين تساوي نسبة التشابه.

$$\frac{P_1}{P_2} = k \Rightarrow P_1 = k \times P_2$$

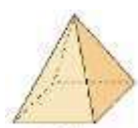
2) نسبة مساحتي شكلين متشابهين تساوي مربع نسبة التشابه.

$$\frac{S_1}{S_2} = k^2 \Rightarrow S_1 = k^2 \times S_2$$

3) نسبة حجمي شكلين متشابهين تساوي مكعب نسبة التشابه.

$$\frac{V_1}{V_2} = k^3 \Rightarrow V_1 = k^3 \times V_2$$

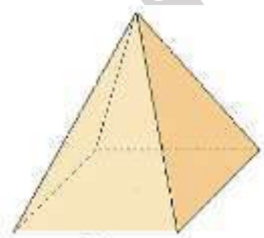
مثال/1/:



F هرم حجمه V ومساحة قاعدته S.
F' **تصغير** للهرم F بنسبة $k = 0.5$ حجمه V' ومساحة قاعدته S' عندئذ يكون:

$$S' = (0.5)^2 \times S$$

$$V' = (0.5)^3 \times V$$



ملاحظة:

تستخدم مبرهنة النسب الثلاث عندما يُذكر توازي مستقيمان في نص المسألة.

أما عندما يطلب إثبات توازي مستقيمان نستخدم عكس مبرهنة النسب الثلاث

الوحدة الثالثة

الزوايا في الدائرة

الزويا في الدائرة

- زاوية محيطية (1)
- زاوية مركزية (2)
- زاوية مماسية (3)
- زاوية خارجية (4)
- زاوية داخلية (5)

زوايا رئيسية (ترد كثيراً): زاوية محيطية، زاوية مركزية، زاوية مماسية

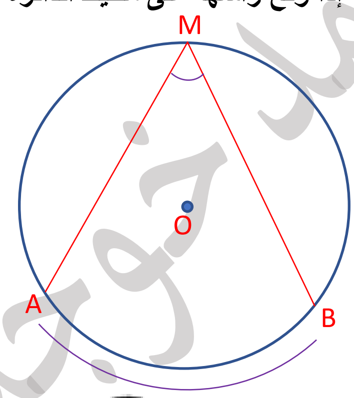
زوايا غير رئيسية (لا ترد كثيراً): زاوية خارجية، زاوية داخلية

تعاريف:

1 الزاوية المحيطية:

نقول عن زاوية أنها محيطية إذا وقع رأسها على محيط الدائرة

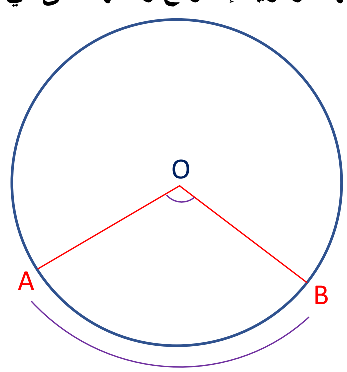
$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$$



$\widehat{AMB}$ زاوية محيطية تقابل (تحصر) القوس $\overset{\frown}{AB}$

2 الزاوية المركزية:

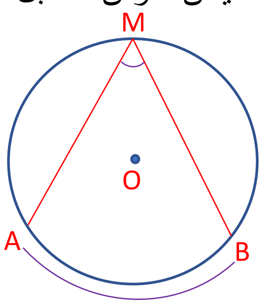
نقول عن زاوية أنها مركزية إذا وقع رأسها على في مركز الدائرة



$\widehat{AOB}$ زاوية محيطية تقابل (تحصر) القوس $\overset{\frown}{AB}$

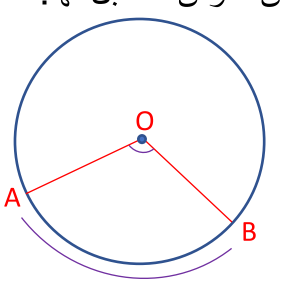
خواص:

1) تقاس الزاوية المحيطية بنصف قياس القوس المقابل لها



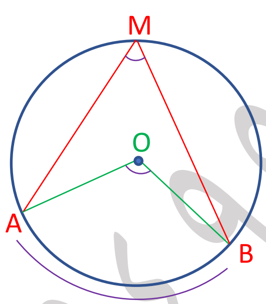
2) تقاس الزاوية المركزية بقياس القوس المقابل لها.

$$\widehat{AOB} = \overset{\frown}{AB}$$



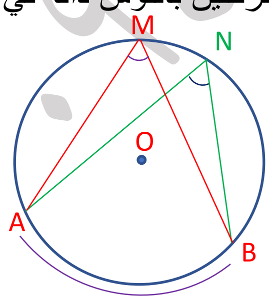
3) تقاس الزاوية المحيطية بنصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بنفس القوس.

$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$$

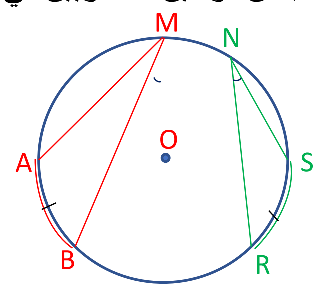


4) قياسا زاويتين محيطيتين مشتركتين بالقوس ذاته في دائرة متساويان.

$$\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$$

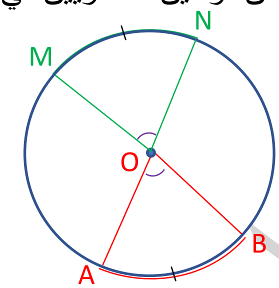


5) قياسا زاويتين محيطيتين تقابلان قوسين متساويين في دائرة متساويان



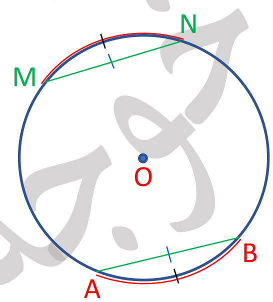
$$\widehat{AMB} = \widehat{RNS}$$

6) قياسا زاويتين مركزيتين تقابلان قوسين متساويين في دائرة متساويان.



$$\widehat{AOB} = \widehat{MON}$$

7) الوتران المتساويان في دائرة يحددان قوسان متساويان **وبالعكس**.



$$MN = AB$$
$$\Updownarrow$$
$$\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{AB}$$

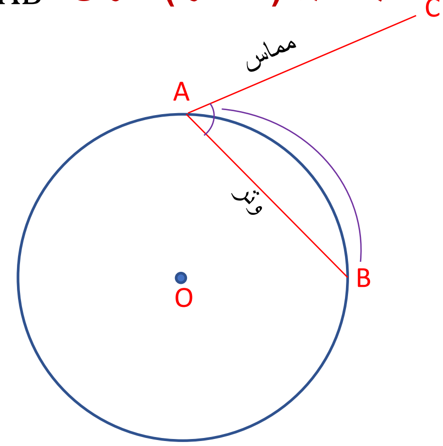
ملاحظة:

تعامل الزاوية المماسية معاملة الزاوية المحيطية.

③ الزاوية المماسية:

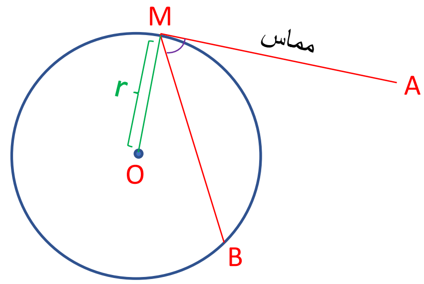
نقول عن زاوية أنها مماسية إذا وقع رأسها على محيط الدائرة وكان أحد أضلاعها وتر في الدائرة والضلع الآخر مماساً لها (أحد أضلاعها داخل الدائرة والضلع الآخر خارجها)

زاوية $\widehat{BAC}$ مماسية تقابل (تحصر) القوس $\overset{\frown}{AB}$

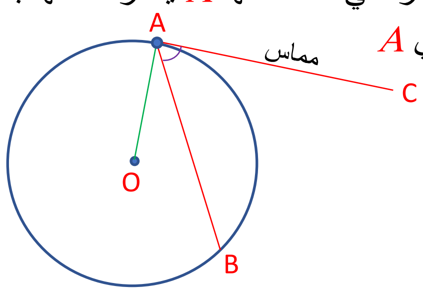


خواص:

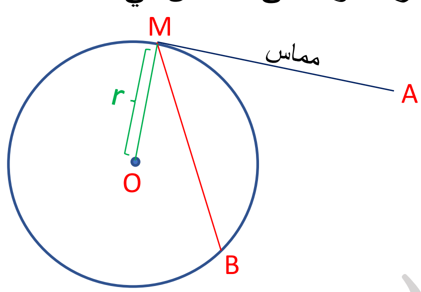
1) بعد مركز الدائرة عن مماس لها يسمى نصف القطر



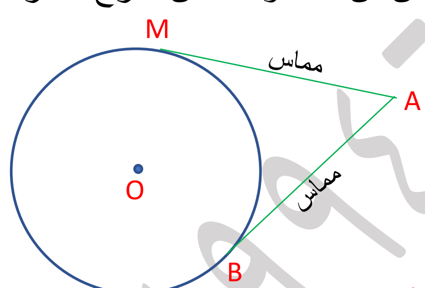
2) مماس الدائرة في نقطة منها A يشترك معها بنقطة واحدة فقط هي A



3) نصف القطر عمود على المماس في نقطة التماس



4) المماسان المرسومان من نقطة واحدة من خارج الدائرة متساويان

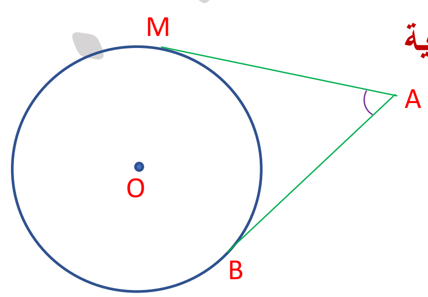


$$AM = AB$$

④ الزاوية الخارجية:

نقول عن زاوية أنها خارجية إذا وقع رأسها وأضلاعها خارج الدائرة.

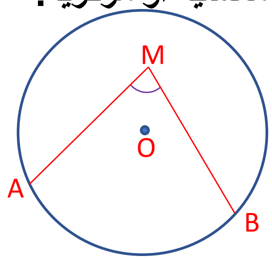
$\widehat{MAB}$ زاوية خارجية



⑤ الزاوية الداخلية:

نقول عن زاوية أنها داخلية إذا وقع رأسها وأضلاعها داخل الدائرة ولم تكن محيطية أو مماسية أو مركزية.

$\widehat{MAB}$ زاوية داخلية



ملاحظة هامة لحل المسائل:

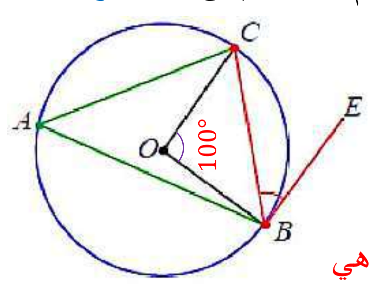
1) لحساب قياس زاوية محيطية إما أن يكون قياس القوس المقتبل لها معلوم أو يجب أن نبحث عن زاوية محيطية أو مماسية أو مركزية تشترك معها بنفس القوس. وكذلك بالنسبة لزاوية مركزية أو مماسية.

2) عزيزي الطالب لضمان الحل بطريقة صحيحة قم بتدوين كل زاوية معلومة القياس (معطاة ضمن نص المسألة) قبل البدء بالحل ومعرفة أي قوس تقابل وإن ورد قياس قوس معلوم دونه أيضاً وقم بمعرفة أي زاوية يقابل محيطية أو مماسية أو مركزية.

مثال صفحة 56:

في الشكل المرسوم جانباً إذا كان $\widehat{COB} = 100°$

احسب قياس القوس $\overset{\frown}{BC}$ ثم احسب قياس $\widehat{CAB}$ و $\widehat{CBE}$



الحل:

لدينا: $\widehat{COB} = 100°$ وهي زاوية مركزية تقابل القوس $\overset{\frown}{BC}$

لحساب قياس القوس $\overset{\frown}{BC}$ نبحث عن زاوية مقابلة له ومعلومة محيطية أو مماسية أو مركزية و نلاحظ أن:

القوس $\overset{\frown}{BC}$ يقابل الزاوية المركزية $\widehat{COB}$ وبالتالي فإن:

$$\widehat{COB} = \overset{\frown}{BC} \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \widehat{COB} = 100°$$

($\widehat{COB}$ زاوية مركزية تقابل القوس $\overset{\frown}{BC}$)

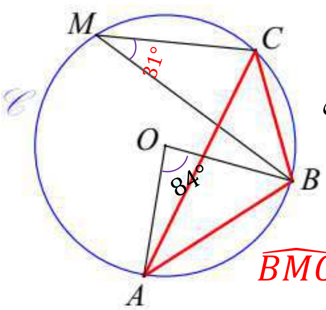
لحساب قياس $\widehat{CAB}$ نبحث عن القوس المقابل لها و إن لم يكن قياسه معلوماً نبحث عن زاوية تقابل القوس ذاته ومعلومة محيطية أو مماسية أو مركزية نلاحظ أن:

الزاوية المحيطية $\widehat{CAB}$ تقابل القوس $\overset{\frown}{BC}$ وتشترك مع الزاوية المركزية $\widehat{COB}$ بالقوس $\overset{\frown}{BC}$ وبالتالي فإن:

$$\widehat{CAB} = \frac{1}{2}\widehat{COB} = \frac{1}{2} \times 100° = 50°$$

($\widehat{CAB}$ زاوية محيطية تشترك مع الزاوية المركزية $\widehat{COB}$ بالقوس $\overset{\frown}{BC}$)

اكتساب معارف صفحة 56:



A و B و C و M تنتمي إلى الدائرة $\mathscr{C}$ مركزها O.

$\widehat{AOB} = 84°$ و $\widehat{BMC} = 31°$

احسب قياسات زوايا المثلث ABC.

الحل:

لدينا: $\widehat{AOB} = 84°$ وهي زاوية مركزية تقابل القوس $\overset{\frown}{AB}$.

و $\widehat{BMC} = 31°$ وهي زاوية محيطية تقابل القوس $\overset{\frown}{BC}$

لحساب قياس $\widehat{ACB}$ نبحث عن القوس المقابل لها و إن لم يكن قياسه معلوماً نبحث عن زاوية تقابل القوس ذاته ومعلومة محيطية أو مماسية أو مركزية نلاحظ أن:

الزاوية المركزية $\widehat{AOB}$ تقابل القوس $\overset{\frown}{BC}$ وتشترك مع الزاوية المحيطية $\widehat{ACB}$ بالقوس $\overset{\frown}{BC}$ وبالتالي فإن:

$$\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \frac{1}{2} \times 84° = 42°$$

($\widehat{ACB}$ زاوية محيطية تشترك مع الزاوية المركزية $\widehat{AOB}$ بالقوس $\overset{\frown}{AB}$)

$$\widehat{BAC} = \widehat{BMC} = 31°$$

($\widehat{BAC}$ و $\widehat{BMC}$ زاويتان **محيطيتان** تشتركتان بالقوس $\overset{\frown}{BC}$)

ومن المعلوم أنَّ مجموع قياس زوايا المثلث تساوي 180°

فيكون:

$$\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 180°$$

$$\widehat{ABC} + 42° + 31° = 180°$$

$$\widehat{ABC} = 180° - (42° + 31°) = 107°$$

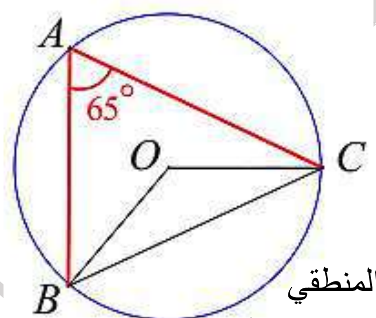
أوجدنا قياس $\widehat{ABC}$ باستخدام مجموع قياسات زوايا مثلث لأنها تقابل القوس $\widehat{AMC}$ وهو مجهول القياس ولا توجد زاوية مقابلة له معلومة القياس.

تدرب صفحة 57:

A و B و C ثلاث نقاط من دائرة مركزها O نعلم أن $\widehat{BAC} = 65°$

احسب قياس كل من:

$\widehat{OCB}$, $\widehat{OBC}$, $\widehat{BOC}$



الحل:

من الرسم نلاحظ أنه من المنطقي إيجاد قياس $\widehat{BOC}$ أولاً كونها تشترك مع الزاوية المحيطية $\widehat{BAC}$ بالقوس نفسه:

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} \Rightarrow \widehat{BOC} = 2 \times \widehat{BAC}$$

$$= 2 \times 65° = 130°$$

($\widehat{BAC}$ زاوية محيطية تشترك مع الزاوية المركزية $\widehat{BOC}$ بالقوس $\widehat{BC}$)

ملاحظة:

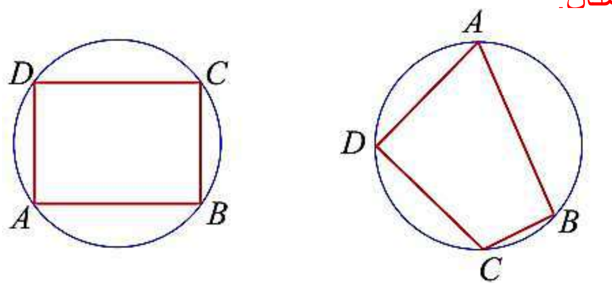
الشرح الوارد أعلاه هو لتبسيط الفكرة فقط وغير مطالبين به أثناء الحل أثناء الحل نكتفي بحساب قياس القوس أو الزاوية مع التعليل فقط.

الرباعي الدائري

تعريف:

الرباعي الدائري هو رباعي تقع رؤوسه على دائرة.

مثال:



ملاحظة:

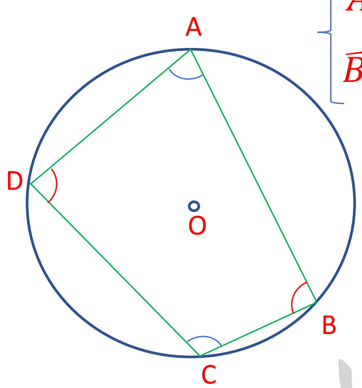
مجموع قياسات زوايا أي شكل رباعي $360°$

خواص:

1) كل زاويتين متقابلتين في رباعي دائري متكاملتان.

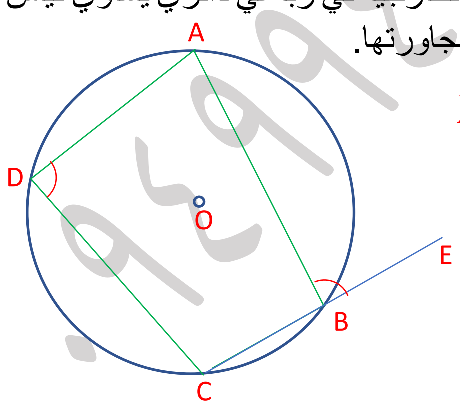
$$\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180°$$

$$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180°$$

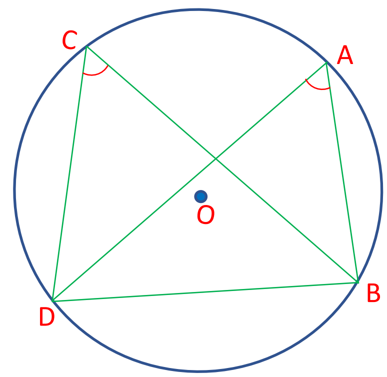


2) قياس الزاوية الخارجية في رباعي دائري يساوي قياس الزاوية المقابلة لمجاورتها.

$$\widehat{ABE} = \widehat{ADC}$$



3) إذا كانت النقاط A و B و C و D واقعة على دائرة واحدة وكانت النقطتان A و C **بجهة واحدة** بالنسبة إلى (BD) كانت الزاويتان $\widehat{BCD}$ و $\widehat{BAD}$ **متساويتان**.



ملاحظة:

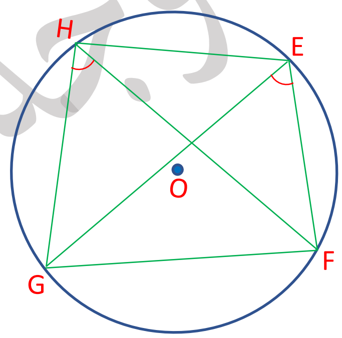
الخاصتان (1) و (3) تقبلان في الحالة المعاكسة أيضاً أي أن:

$(1')$ إذا تكاملت زاويتان متقابلتان في شكل رباعي كان الرباعي دائرياً.

$(3')$ إذا تساوت الزاويتان $\widehat{BAD}$ و $\widehat{BCD}$ وكانت النقطتان A و C **بجهة واحدة** بالنسبة إلى (BD) في شكل رباعي كان الرباعي دائرياً.

مثال:

في الشكل المجاور $EFGH$ رباعي فيه $\widehat{GEF} = \widehat{GHF}$ هل الدائرة التي تمر بالنقاط E و G و F تمر من H؟

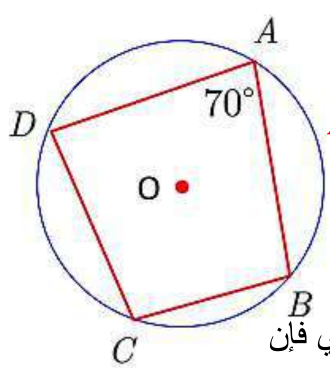


الحل:

بكل ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة تمر دائرة واحدة إذاً هناك دائرة واحدة تمر بالنقاط E و G و F **و وحيدة** ومن جهة أخرى لدينا $\widehat{GEF} = \widehat{GHF}$ وتقعان في جهة واحدة بالنسبة إلى لمستقيم (BD) أي إن الرباعي $EFGH$ رباعي دائري. إذاً الدائرة التي تمر بالنقاط E و G و F تمر أيضاً بالنقطة H .

تمرين/1/:

لدينا في الشكل المجاور $ABCD$ رباعي ً دائري $\hat{A} = 70°$ أوجد قياس $\hat{C}$

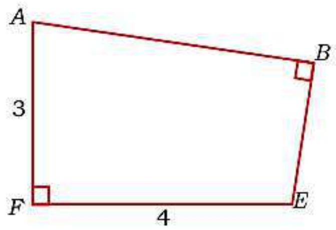


الحل:

بما أن $ABCD$ هو رباعي دائري فإن

$$\widehat{BAC} + \widehat{BCD} = 180° \Rightarrow 90° + \widehat{BCD} = 180°$$
$$\Rightarrow \widehat{BCD} = 180° - 90° = 90° \Rightarrow \hat{C} = 90°$$

تمرين/2/:



في الشكل المرسوم جانباً لدينا رباعي $ABEF$ فيه :

$\hat{F} = \hat{B} = 90°$

$AF = 3cm$ و $FE = 4cm$

1) أثبت أن النقاط A , B , E , F تقع على دائرة واحدة. 2) عين مركز هذه الدائرة وطول نصف قطرها.

الحل:

1) بما أن $\hat{F} = \hat{B} = 90°$ فإن: $\hat{F} + \hat{B} = 180°$ أي أن الرباعي $ABEF$ هو رباعي دائري

2) ملاااااااااحظة:

في مثل تلك الحالات نعتمد على الخاصة:

مركز الدائرة المارة برؤوس مثلث قائم يقع منتصف الوتر أي نرسم أحد أقطار الرباعي بحيث يقسم الرباعي لمثلثين قائمين فيكون مركز الدائرة المارة برؤوس الرباعي الدائري هو منتصف الوتر المشترك (قطر الرباعي) للمثلثين القائمين ونصف قطرها يساوي نصف طول الوتر(قطر الرباعي)

نرسم قطر الرباعي AE فيقسمه إلى مثلثين قائمين فيكون مركز الدائرة المارة برؤوس الرباعي يقع منتصف وتر المثلث AFE القائم ويكون نصف قطرها: $R = \frac{AE}{2}$

لنحسب طول AE:

بحسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث AFE القائم:

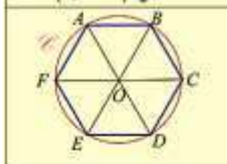
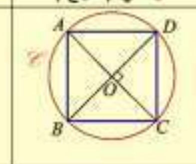
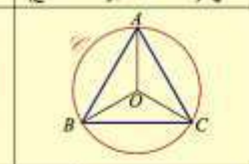
$$(AE)^2 = (AF)^2 + (FE)^2$$
$$\Rightarrow (AE)^2 = (3)^2 + (4)^2 = 9 + 16 = 25$$
$$\Rightarrow AE = 5cm$$

$$\Rightarrow R = \frac{AE}{2} = \frac{5}{2} = 2.5cm$$

المضلعات المنتظمة

تعريف:

المضلع المنتظم هو مضلع { قياسات زواياه **متساوية** و أطوال أضلاعه **متساوية** .

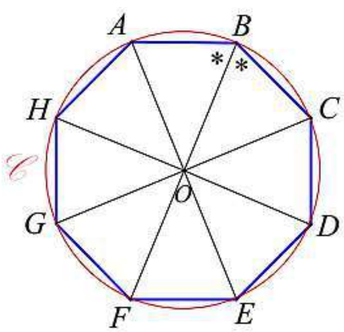
سداسي (مسدس)	رباعي (مربع)	ثلاثي (مثلث متساوي الأضلاع)
		
مسدس ABCDEF	مربع ABCD	مثلث متساوي الأضلاع ABC
$\widehat{ABC}=120^\circ$ $\widehat{AOB}=60^\circ$	$\widehat{ABC}=90^\circ$ $\widehat{AOB}=90^\circ$	$\widehat{ABC}=60^\circ$ $\widehat{AOB}=120^\circ$

خواص:

1) كل مضلع منتظم قابل للارتسام في دائرة (بمعنى وجود دائرة مارة برؤوسه) يسمى مركز الدائرة المارة برؤوس مضلع منتظم أيضاً **مركز المضلع المنتظم**.

2) إذا كان $[AB]$ ضلعاً في مضلع منتظم مركزه O وعدد أضلاعه n كان $\widehat{AOB}=\frac{360^\circ}{n}$.

مثال صفحة 63:



ABCDEFGH مثمن **منتظم** مرسوم في دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O. ماقياس الزاوية $\widehat{ABC}$.

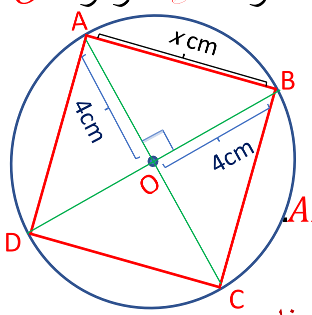
الحل:

نعلم أنَّ: $\widehat{AOB}=\frac{360^\circ}{n}$. حيث n هو عدد الأضلاع وللمثمن المنتظم ثمانية أضلاع $n=8$ إذاً:

$$\widehat{AOB}=\frac{360^\circ}{8}=45^\circ$$

تدرب صفحة 65:

1) $ABCD$ مربع مرسوم في دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O ونصف قطرها 4cm.



1) احسب الطول AB.
2) احسب محيط هذا المربع.
3) احسب مساحة المربع $ABCD$.

الحل:

بما أن المربع هو مضلع منتظم فإن:

$$\widehat{AOB}=\frac{360^\circ}{4}=90^\circ$$

فالمثلث AOB قائم في $\hat{O}$. $OA=OB=4cm$. باستعمال مبرهنة فيثاغورث نجد:

$$(OA)^2+(OB)^2=(AB)^2$$

$$(4)^2+(4)^2=(AB)^2$$

$$\Rightarrow (AB)^2=16+16=32$$

$$\Rightarrow AB=4\sqrt{2}cm$$

2) نرمز إلى محيط هذا المربع بالرمز P فيكون:

$$P=4\times AB=4\times 4\sqrt{2}=16\sqrt{2}cm$$

3) نرمز إلى مساحة هذا المربع بالرمز S فيكون:

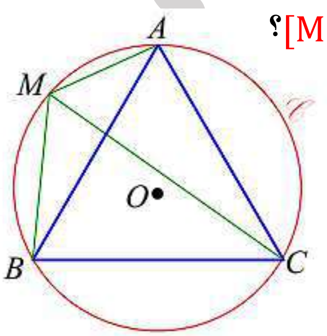
$$S=(AB)^2=(4\sqrt{2})^2=32cm^2$$

2) ABC مثلث متساوي الأضلاع مرسوم في دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O و M نقطة من القوس $\overset{\frown}{AB}$.

1) احسب قياس كل من الزوايا:

1. $\widehat{AMC}$ .2 $\widehat{BMC}$ .3 $\widehat{AMB}$

2) ماذا تسمي نصف المستقيم [MC)؟



الحل:

1) بما أن المثلث ABC متساوي الأضلاع فإن:

$$\widehat{AOB}=\widehat{AOC}=\widehat{BOC}=\frac{360^\circ}{3}=120^\circ$$

بما أن المثلث ABC متساوي فإن: AB = AC = BC

وبحسب الخاصة :الوتران المتساويان في دائرة يحددان قوسان متساويان وبما أن: AB = AC = BC فإن:

$$\widehat{AB} = \widehat{AC} = \widehat{BC} = 120^{\circ}$$

$$\widehat{AMC} = \frac{1}{2}\widehat{AB} = \frac{1}{2} \times 120^{\circ} = 60^{\circ}$$

($\widehat{AMC}$ زاوية محيطية تقابل القوس $\widehat{AB}$)

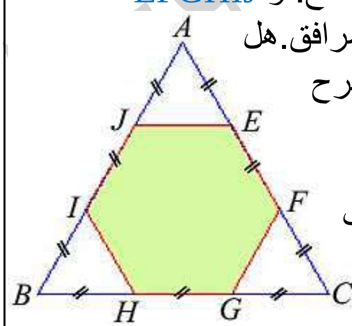
$$\widehat{BMC} = \frac{1}{2}\widehat{BC} = \frac{1}{2} \times 120^{\circ} = 60^{\circ}$$

($\widehat{BMC}$ زاوية محيطية تقابل القوس $\widehat{BC}$)

$$\widehat{AMB} = \widehat{AMC} + \widehat{BMC} = 60^{\circ} + 60^{\circ} = 120^{\circ}$$

2) نسمي نصف المستقيم [MC) منصف الزاوية $\widehat{AMB}$

3) ABC مثلث متساوي الأضلاع. و EFGHIJ مسدس مشار إليه في الشكل المرافق.هل المسدس EFGHIJ منتظم؟ اشرح



الحل:

لبرهان أن المسدس منتظم يجب أن نبرهن أن أطوال أضلاعه متساوي وقياسات زواياه متساوي.

- بما أن المثلث ABC متساوي الأضلاع فإن:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^{\circ} \\ AB = AC = BC \end{array}\right\}$$

لدينا المثلث AJE متساوي الساقين رأسه $\hat{A}$ حيث أن:

$$\hat{A} = 60^{\circ}$$

وبالتالي فإن المثلث AJE متساوي الأضلاع أي أن:

$$AE = AJ = JE$$

بشكل مماثل نجد أن:

$$\left.\begin{array}{l} IB = BH = IH \\ FG = CF = CG \end{array}\right\}$$

وبما أن: $AJ = \frac{1}{3}AB$ فإن:

$$AE = AJ = JE = \frac{1}{3}AB \qquad (1)$$

بشكل مماثل نجد أن:

$$\left.\begin{array}{l} IB = BH = IH = \frac{1}{3}AB \\ FG = CF = CG = \frac{1}{3}AC \end{array}\right\}$$

وبما أن: $AB = AC = BC$ فإن :

$$FG = IH = JE = IJ = EF = HG$$

أي أن أطوال أضلاع المسدس متساوية بقي أن نبرهن أن قياسات زواياه متساوية.

- لدينا $\widehat{JEF}$ هي زاوية خارجية بالنسبة للمثلث المتساوي الأضلاع AJE وبالتالي فإن: $\widehat{JEF} = 120°$

حيث أن: $\widehat{JEF} + \widehat{JEA} = 180°$ (زاويتان متجاورتان يصنعان زاوية مستقيمة)

بشكل مماثل نجد أن:

$$\widehat{EFG} = \widehat{FGH} = \widehat{GHI} = \widehat{HIJ} = \widehat{IJE} = 120°$$

أي أن قياسات الزاويا متساوية أي أن:

المسدس EFGHIJ منتظم

ملاحظة:

حتى يكون المجسم منتظم حصراً يجب أن يتحقق الشرطان: قياسات زواياه **متساوية** وأطوال أضلاعه **متساوية** .

فإن تحقق أحدهما فقط فالمضلع ليس منتظماً.

إعداد المدرس: محمد خوجه 0949946383

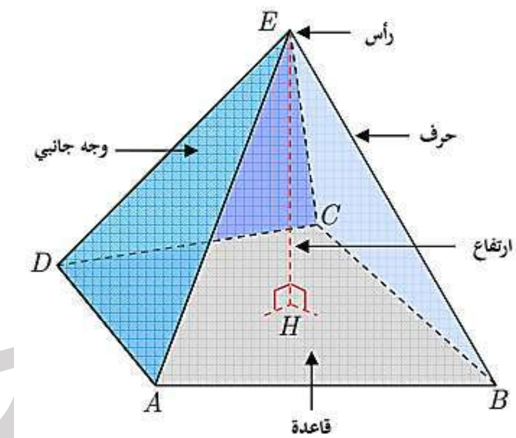
الوحدة الرابعة

المجسمات

الهرم:

هو مجسم يميزه:

- نقطة E **لا** تنتمي إلى القاعدة تسمى " **رأس الهرم** ".
- **مثلثات** مشتركة بالرأس E وقواعدها هي أضلاع قاعدة الهرم، يسمى كل منها " **وجهاً جانبياً** ".
- السطح الجانبي هو السطح المؤلف من **مجموعة** الأوجه الجانبية.
- ارتفاع الهرم من رأسه E هو العمود [EH] على مستوي قاعدته حيث H نقطة من القاعدة.

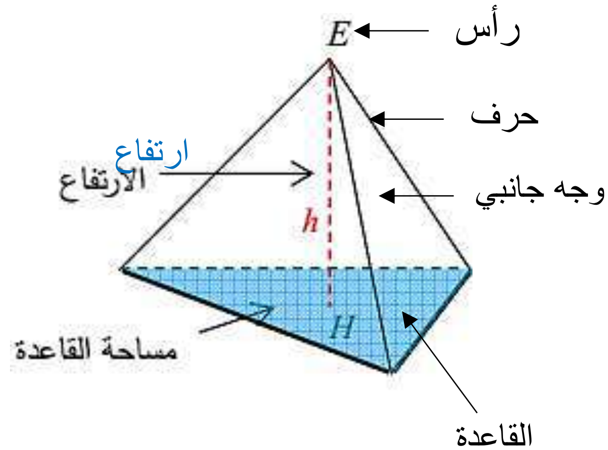


الهرم المنتظم:

نقول إنَّ هرماً رأسه E هو **هرم منتظم** إذا استوفى الشرطين:

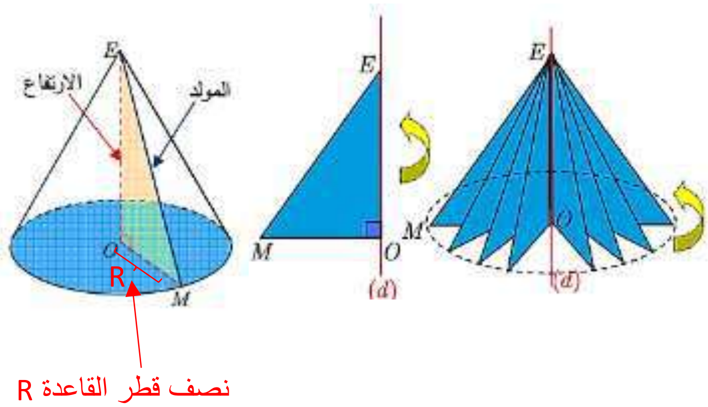
1– قاعدته **مضلع منتظم** مركزه O (مثلث متساوي الأضلاع أو مربع أو.......)

2– ارتفاعه هو القطعة المستقيمة [EO] (الواصلة بين رأس الهرم ومركز القاعدة)



المخروط الدوراني:

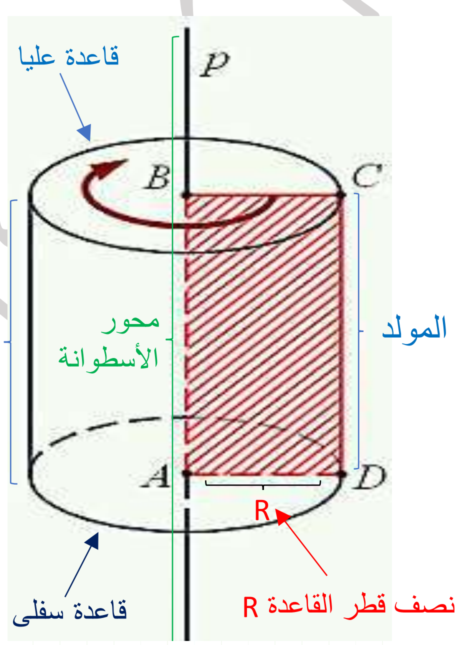
المخروط الدوراني الذي رأسه E هو المجسم المتولد من **دوران** مثلث EOM **قائم** في O حول المستقيم (OE).
القرص المتولد من دوران [OM] هو قاعدة المخروط.



- **ارتفاع المخروط الدوراني** الذي رأسه E ومركز قاعدته O هو القطعة المستقيمة [EO]. وهو أيضاً الطول EO.
- المستقيم (EO) **عمودي** على مستوي القاعدة.

الأسطوانة الدوانية:

هي عبارة عن مجسم ينتج من **دوران مستطيل** حول أحد أضلاعه **دورة كاملة** ويسمى محور الدوران " **محور الأسطوانة** " والضلع المقابل له " **المولد** " والقطعة المستقيمة التي تتعامد مع قاعدتي الأسطوانة تسمى " ارتفاع الأسطوانة "



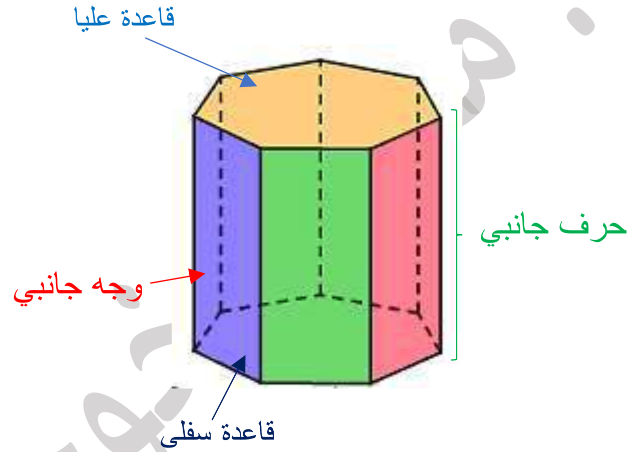
الموشور القائم:

هو مجسم يتكون من

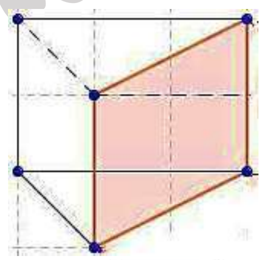
1- قاعدتين متوازيتين و قابلتين للتطابق.

2- أحرف جانبية متقايسة كل منها يعتبر ارتفاع في الموشور.

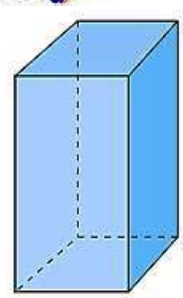
3- أوجه جانبية على شكل مستطيلات أو مربعات.



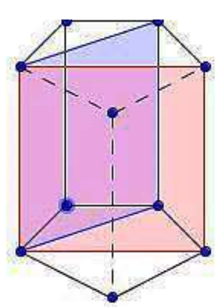
يسمى الموشور بحسب عدد اضلاع قاعدته:



فالموشور الثلاثي تكون قاعدته مثلث



فالموشور الرباعي تكون قاعدته مربع



فالموشور الخماسي تكون قاعدته مخمس

وهكذا......................

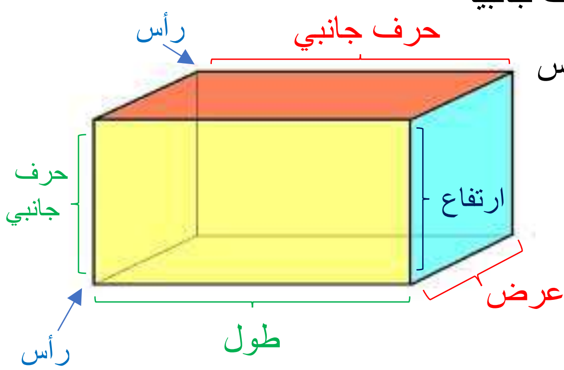
متوازي المستطيلات:

هو مجسم ثلاثي ثلاثي الأبعاد " أي له طول وعرض و ارتفاع " يتكون من:

1- وجوه جانبية

2- أحرف جانبية

3- رؤوس



كما أن متوازي المستطيلات يمتاز بالإضافة لما ذكرناه سابقاً بما يلي:

- كل وجهين متقابلين متوازيين وطبوقان.
- الأحرف المتقابلة في متوازي المستطيلات متوازية ومتساوية.

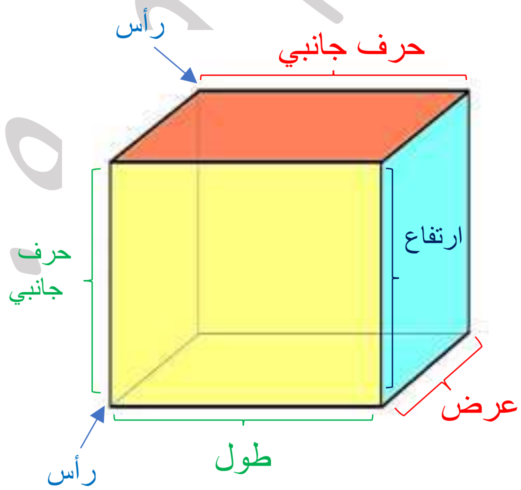
المكعب:

هو مجسم ثلاثي ثلاثي الأبعاد " أي له طول وعرض و ارتفاع " يتكون من:

1- وجوه جانبية

2- أحرف جانبية

3- رؤوس



قوانين المجسمات

	الموشور القائم	الأسطوانة الدورانية
المساحة الجانبية	محيط القاعدة × الارتفاع $S_L = P \times h$	محيط القاعدة × الارتفاع $S_L = P \times h$ $= 2\pi . r \times h$
المساحة الكلية	المساحة الجانبية + ضعفي مساحة القاعدة $S_T = S_L + 2S$	المساحة الجانبية + ضعفي مساحة القاعدة $S_T = S_L + 2S$ $= S_L + 2\pi r^2$
الحجم	مساحة القاعدة × الارتفاع $v = S \times h$	مساحة القاعدة × الارتفاع $v = S \times h$ $= \pi r^2 \times h$
مساحة السطح	مجموع مساحات الأوجه المشكلة للموشور $S = 2S_1 + 2S_2 + 2S_3$	

	الهرم	المخروط الدوراني
المساحة الجانبية	محيط القاعدة × الارتفاع $S_L = P \times h$	$\frac{1}{2}$ × محيط القاعدة × طول مولده $S_L = \frac{1}{2} \times P \times L$ $= \frac{1}{2} \times (2\pi . r) \times L = \pi . r \times L$
الحجم	مساحة القاعدة × الارتفاع $v = \frac{1}{3} \times S_b \times h$	$\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع $v = \frac{1}{3} \times S_b \times h$ $= \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h$

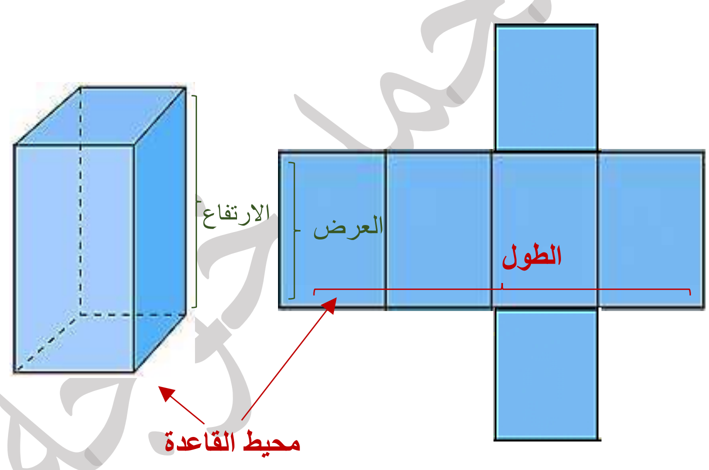
	متوازي المستطيلات	المكعب
المساحة الجانبية	محيط القاعدة × الارتفاع $S_L = P \times h$	محيط القاعدة × الارتفاع $S_L = P \times h$
الحجم	الطول ×العرض × الارتفاع $v = x \times y \times z$	طول الضلع للتكعيب $v = (x)^2$
مساحة السطح	مجموع مساحات الأوجه المشكلة للموشور $S = 2S_1 + 2S_2 + 2S_3$	2 × مساحة أحد الوجوه $S = 6 \times S_1$

ماذا تعني المساحة الجانبية؟

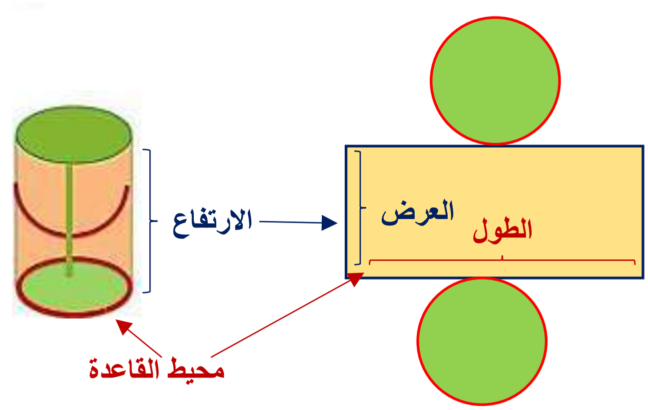
هي عبارة عن مساحة المضلع المشكل للمجسم لكن بدون القاعدتين.

فمثلا:

الموشور القائم أو متوازي المستطيلات مساحته الجانبية هي عبارة عن مساحة الصفيحة المستطيلة المكونة له بدون القاعدان ونلاحظ أن محيط القاعدة هو عبارة عن طول الصفيحة المستطيلة أما ارتفاع الموشور هي عبارة عن عرض الصفيحة المستطيلة.



والأسطوانة كما نلاحظ قبل تشكيلها كانت عبارة عن صفيحة مستطيلة الشكل كما أنه من الواضح أن محيط قاعدتها هو عبارة عن طول الصفيحة المستطيلة و إرتفاعها هو عبارة عن عرض الصفيحة المستطيلة.

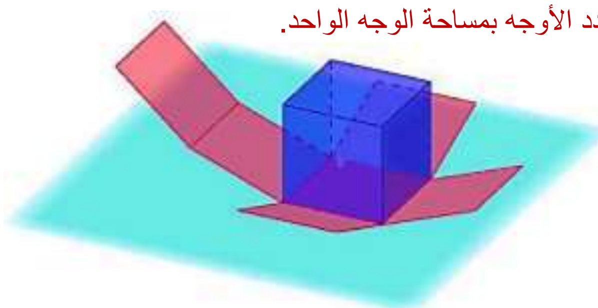


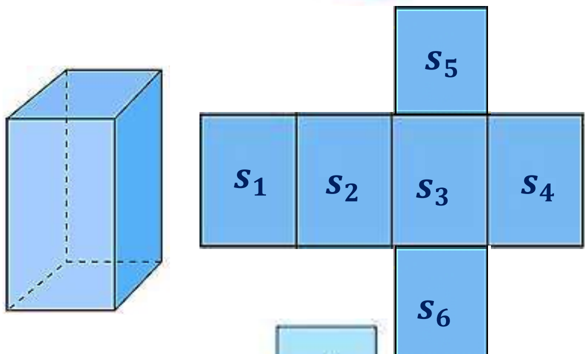
ماذا تعني مساحة السطح؟

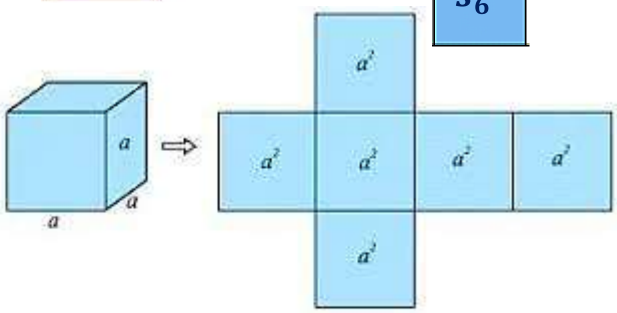
هي عبارة عن مساحة جميع الأوجه المشكلة للمجسم.

فمثلا:

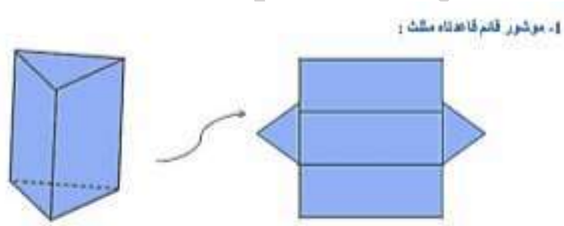
الكمعب مؤلف من أربع أوجه جانبية وقاعدتان أي أنه يتألف من ستة مربعات طبوقة وبالتالي فإن مساحة سطح المكعب هي مجموع مساحات تلك المربعات وبما أنها طبوقة فتكون عبارة عن جداء عدد الأوجه بمساحة الوجه الواحد.

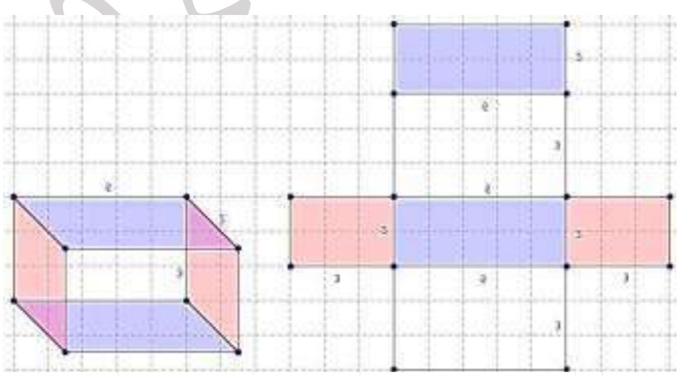






وبالمثل نجد أن:





مثال:

أسطوانة دورانية ارتفاعها 40cm طول نصف قطر قاعدتها 7.5cm أوجد مساحتها الجانبية ثم مساحتها الكلية ثم حجمها.

الحل:

$$h = 40cm \quad و \quad r = 7.5cm$$

حساب المساحة الجانبية:

$$S_L = 2\pi . r . h = 2\pi \times 7.5 \times 40 = 600\pi cm^2$$

حساب المساحة الكلية:

$$S_T = S_L + 2\pi r^2 = 600\pi + 2 \times \pi \times (7.5)^2$$

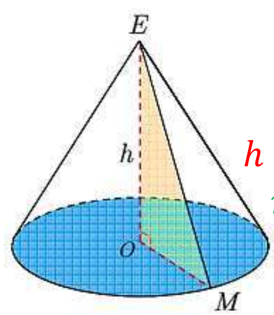
$$= 600\pi + 2\pi \times 56.25 = 600\pi + 112.5\pi = 712.5\pi\ cm^2$$

حساب الحجم:

$$V = S_b \times h = \pi r^2 \times h = \pi \times (7.5)^2 \times 40$$

$$= 2250\pi\ cm^3$$

حيث أنه لسهولة التعبير نرمز لمساحة القاعدة عادة بالرمز S



مثال:

مخروط دوراني ارتفاعه $h = 4cm$ ونصف قطر قاعدته $r = 1.5cm$ وبالتالي فإن :

$$h = 4cm \quad و \quad r = 1.5cm$$

$$v = \frac{1}{3} \times S_b \times h = \frac{1}{3}(\pi r^2)h$$

$$= \frac{1}{3}(\pi \times (1.5)^2) \times 4 = \frac{4}{3}(\pi \times 2.25)$$

$$= \frac{9}{3}\pi$$

$$\Rightarrow v = 3\pi cm^3$$

$$S_L = \pi r \times L = \pi \times 1.5 \times 4 = 6\pi cm^2$$

الكرة:

كرة القدم: شكل كروي مجوَّف، له في الرياضيات شكل سطح كروي.

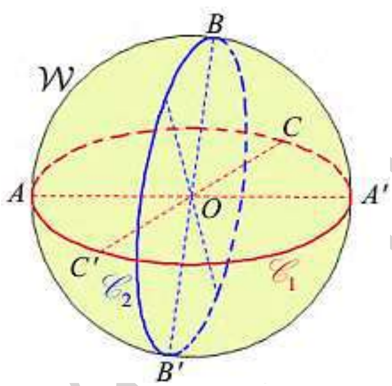
كرة البلياردو: شكل كروي مليئ، له في الرياضيات شكل مجسم كروي.

السطح الكروي: ذو المركز O ونصف القطر P هو مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق $OM = R$

المجسمات الكروية: ذو المركز O ونصف القطر P هو مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق $OM \le R$

خطوط مميزة:

- قطر الكرة W هو قطعة مستقيمة منتصفها مركز الكرة O وطرفاها نقطتان من الكرة.
- **أقطار الكرة** لها الطول ذاته وهو 2R. يسمى هذا الطول أيضاً قطر الكرة.
- **الدائرة الكبرى** هي دائرة واقعة على الكرة وقطرها **يساوي** قطر الكرة.
- في الشكل المرافق: [AÀ] و [BB̀] و [CC̀] **أقطار** في الكرة W.



النقطتان A و À متقابلتان قطرياً، كذلك النقطتان B و B̀ متقابلتان قطرياً و النقطتان C و C̀ متقابلتان قطرياً أيضاً $\mathscr{C}_1$ دائرة كبرى و $\mathscr{C}_2$ دائرة كبرى.

➢ **قوانين:**

مساحة سطح كرة بدلالة نصف قطرها $S = 4\pi R^2$

حجم الكرة بدلالة نصف قطرها $v = \frac{4}{3}\pi R^3$

مثال:

كرة **قطرها** 60cm احسب مساحة سطحها بالسنتيمترات المربعة.

الحل:

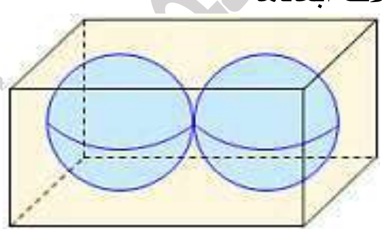
علينا بدايةً حساب نصف قطر الكرة كي نستعمل دستور مساحة سطح كروي. نصف قطر الكرة:

$$R = \frac{60}{2} = 30cm$$

$$\Rightarrow S = 4\pi \times R^2 = 4\pi \times (30)^2$$
$$= 4\pi \times 900$$
$$= 3600\pi\ cm^2$$

مثال/2/:

علبة بشكل متوازي مستطيلات أبعادها $8cm\ , 4cm\ , 4cm$



تحتوي هذه العلبة **كرتين متساويتين** نصف قطر كلٍّ منهما $2cm$ تمسان أوجه العلبة (كماترى في الشكل المرافق) احسب حجم الفراغ المحصور بين الكرتين والعلبة.

الحل:

في مثل تلك الحالات نحسب حجم المجسم الكبير و المجسم الصغير ونطرح حجم المجسم الصغير من حجم المجسم الكبير.

نرمز إلى حجم العلبة بالرمز V_1 فيكون:

$$V_1 = 4 \times 4 \times 8 = 128cm^3$$

نرمز إلى حجم **إحدى** الكرتين بالرمز V_2 فيكون:

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi \times R^3 = \frac{4}{3}\pi \times (2)^3 = \frac{4}{3}\pi \times 8$$
$$= \frac{32}{3}\pi cm^3$$

نرمز حجم الفراغ المحصور بين الكرتين والعلبة بالرمز V فيكون:

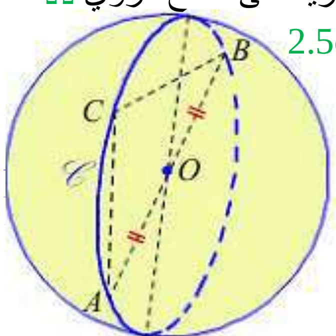
$$V = V_1 - 2V_2 = 128 - 2(\frac{32}{3}\pi)$$
$$= (128 - \frac{64}{3}\pi)cm^3$$

ملاحظة:

بما أن الكرتان طبوقتان قمنا بحساب حجم إحداها وضربه بالعدد 2 لينتج لدينا حجم الكرتان.

مثال/3/:

A و B نقطتان متقابلتان قطرياً على سطح كروي Ω مركزه O ونصف قطره 2.5cm

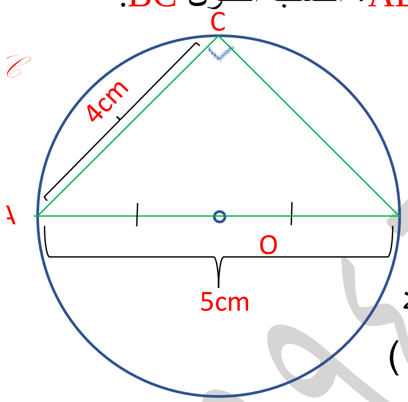


C نقطة من دائرة كبرى 𝒞 مارة بالنقطتين A و B مع AC=4cm

1) ارسم الدائرة 𝒞 بأبعادها التامة ووضّع عليها النقاط A و B و C.

2) ماطبيعة المثلث ABC؟ احسب الطول BC.

1)



2) المثلث ABC قائم في $\hat{C}$ لأن:

$$\widehat{ACB} = 90^\circ$$

($\widehat{ACB}$ زاوية محيطية تقابل قطر الدائرة AB)

بحسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث ABC القائم نجد:

$$(BC)^2 + (AC)^2 = (\ AB\ )^2$$

$$(\ BC)^2 + 16 = 25\ \Rightarrow (BC)^2 + (4)^2 = (\ 5)^2$$

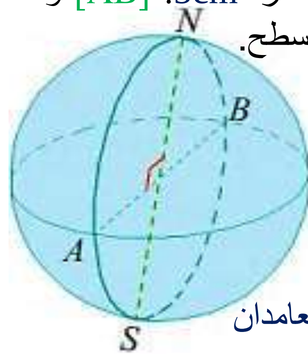
$$(\ BC)^2 = 25 - 16 = 9 \xrightarrow{\text{بالجذر نجد}} BC = 3cm$$

مثال/4/:

سطح كروي مركزه O ونصف قطره 5cm. [AB] و [NS] قطران **متعامدان** في هذا السطح.

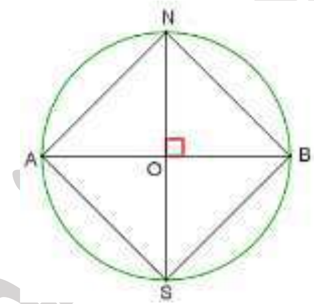
1) ما طبيعة الرباعي *ANBS*؟

2) ارسم *ANBS* بأبعاده التامة؟



الحل:

بما أن [AB] و [NS] قطران متعامدان ومتساويان فإن الرباعي *ANBS* هو مربع



مثال/5/:

حساب حجم كرة بدلالة قطرها.

كرة **قطرها** d.

1) أثبت أنَّ حجم هذه الكرة V يعطى بالقانون $V=\frac{1}{6}\pi d^3$

2) احسب بدلالة d مساحة سطح هذه الكرة.

الحل: $2R=d \Rightarrow R=\frac{d}{2}$

1) نعلم أن: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow V=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3=\frac{4}{3}\pi\times\frac{d^3}{2^3}$$

$$=\frac{\cancel{4}}{3}\pi\times\frac{d^3}{\cancel{8}}=\frac{1}{3}\pi\times\frac{d^3}{2}=\frac{1}{6}\pi d^3$$

2) $S=4\pi R^2=4\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2=\cancel{4}\pi\times\frac{d^2}{\cancel{4}}=\pi d^2$

مثال/6/:

مخروط، أسطوانة، كرة.

لدينا مخروط C وأسطوانة A وكرة S نصف قطر الكرة R يساوي نصف قطر قاعدة المخروط و يساوي نصف قطر قاعدة الأسطوانة. ارتفاع المخروط 2R يساوي ارتفاع الأسطوانة.

1) احسب بدلالة R القيمة التامة لحجم كل من هذه المجسمات.

2) جد علاقة بين حجوم هذه المجسمات.

الحل:

لدينا:
$$\begin{cases} R_S=R_A=R_C=R \\ h_C=h_A=2R \end{cases}$$

1)حجم المخروط:

$$V_C=\frac{1}{3}S\times h=\frac{1}{3}\pi R^2\times h_C$$
$$=\frac{1}{3}\pi R^2\times 2R=\frac{2}{3}\pi R^3$$

حجم الأسطوانة: $V_A=S\times h=\pi R^2\times h_A$
$$=\pi R^2\times 2R=2\pi R^3$$

حجم الكرة: $V_S=\frac{4}{3}\pi R^3$

2) ملاحظة:

إيجاد علاقة بين مقدارين بشكل عام تعني كتابة الأول بدلالة الثاني مجموع أو طروح أو مقسم أو مضروب على عدد مثل كتابة x بدلالة y في طريقة الحذف بالتعويض في حل جملة معادلتين.

$$V_S+V_C=\frac{4}{3}\pi R^3+\frac{2}{3}\pi R^3=\frac{6}{3}\pi R^3$$
$$=2\pi R^3=V_A$$
$$\Rightarrow V_S+V_C=V_A$$

مثال/7/:

عددان متساويان.

كرة S نصف قطرها R سنتيمتراً. كم يجب أن تكون قيمة R ليكون العدد الدال على حجم هذه الكرة **مساوياً** العدد الدال على مساحة سطح هذه الكرة ؟

الحل:

مساحة سطح الكرة = حجم الكرة

V = S

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2 \Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 - 4\pi R^2 = 0$$

$$\Rightarrow 4\pi R^2\left[\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi R^2} - \frac{4\pi R^2}{4\pi R^2}\right] = 0$$

$$4\pi R^2\left(\frac{1}{3}R - 1\right) = 0$$

إما $4\pi R^2 = 0 \Rightarrow R = 0cm$ مرفوض

أو $\frac{1}{3}R - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}R = 1$

$\Rightarrow R = 3cm$ مقبول

طريقة ثانية:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2 \Rightarrow \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi R^2} = \frac{4\pi R^2}{4\pi R^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}R = 1 \Rightarrow R = 3cm$$

مثال/8/:

حجم الكرة الأرضية.

سنعتبر في هذه المسألة أنَّ نصف قطر الكرة الأرضية يساوي 6400km.

1) احسب حجم الكرة الأرضية بالكيلو مترات المكعبة.

2) الشمس هي الأخرى مجسم كروي نصف قطرها يساوي 109 أمثال نصف قطر الكرة الأرضية.

انسخ وأكمل: «حجم الشمس يساوي.........أمثال حجم الأرض»

الحل:

$$R_1 = 6400km$$

1) حجم الكرة الأرضية:

$$V_1 = \frac{4\pi}{3}R_1^3 = \frac{4\pi}{3}(6400)^3$$
$$= \frac{4\pi}{3}(64 \times 10^2)^3$$
$$= \frac{4\pi}{3}(64)^3 \times 10^6 km^3$$

2) $R_2 = 109 \times 6400km$

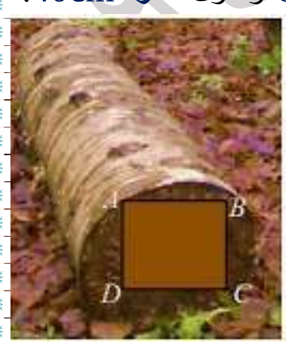
حجم الشمس:

$$V_2 = \frac{4\pi}{3}R_2^3 = \frac{4\pi}{3}(109 \times 6400)^3$$
$$= \frac{4\pi}{3}(109 \times 64 \times 10^2)^3$$
$$= \frac{4\pi}{3} \times (109)^3 \times (64)^3 \times 10^6 km^3$$
$$= (109)^3 \times \frac{4\pi}{3} \times (64)^3 \times 10^6 km^3$$

حجم الشمس يساوي $(109)^3$ أمثال حجم الأرض

مثال/10/:

جذع شجرة أسطواني ارتفاعه **6m** وقاعدته قرص دائري مركزه O ونصف قطره 20cm. نريد أن نفتح مجرىً في هذا الجذع بهيئة متوازي مستطيلات ارتفاعه **6m** وقاعدته ABCD مربع مركزه O وطول **قطره** 40cm.

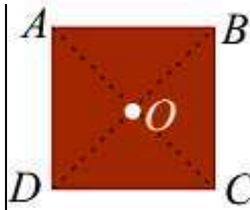


1) احسب القيمة التامة لحجم جذع الشجرة.

2) احسب مساحة المربع ABCD.

3) احسب حجم المجرى.

الحل:



$h = 6m\ , R = 20cm = 0.2m$

$h' = 6m\ , R' = 20cm = 0.2m$

$$1)\ V = \pi R^2 h = \pi(0.2)^2 \times 6 = 0.04\pi \times 6 = 0.24\pi m^3$$

$$2) S(ABCD) = (AB)^2$$

المثلث OAB قائم الزاوية في $\hat{O}$ فحسب مبرهنة فيثاغورث:

$$(OA)^2 + (OB)^2 = (AB)^2$$
$$(0.2)^2 + (0.2)^2 = (AB)^2$$
$$\Rightarrow (AB)^2 = 0.04 + 0.04 = 0.08$$
$$\Rightarrow S(ABCD) = (AB)^2 = 0.08\mathrm{m}$$

$$3)\ V = S \times h = 0.08 \times 6 = 0.48 m^3$$